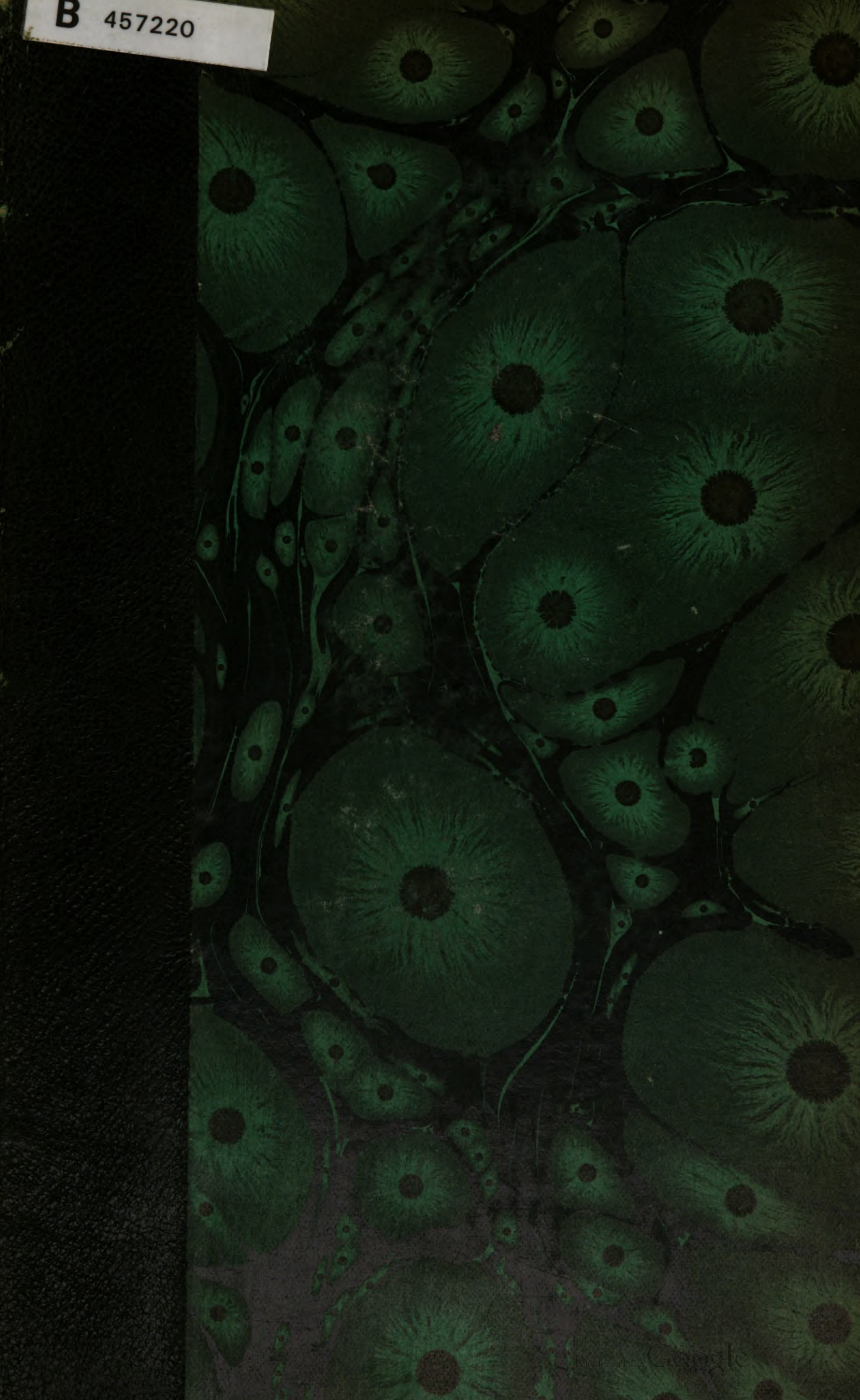

B 457220
Google


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



RECUEIL

DE

PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

CLASSÉS PAR DIVISIONS SCIENTIFIQUES

CONTENANT

LES ÉNONCÉS, AVEC RENVOI AUX SOLUTIONS, DE TOUS LES PROBLÈMES POSÉS DEPUIS L'ORIGINE DANS DIVERS JOURNAUX :

Nouvelles Annales de Mathématiques,
Journal de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales,
Mathesis, Nouvelle Correspondance mathématique.

DIVISION DE L'OUVRAGE.

A l'usage des classes de Mathématiques élémentaires.

I. — Arithmétique. — Algèbre élémentaire. — Trigonométrie.

II. — Géométrie à deux dimensions. — Géométrie à trois dimensions. — Géométrie descriptive.

A l'usage des classes de Mathématiques spéciales.

III. — Algèbre. — Théorie des nombres. — Probabilités. — Géométrie de situation.

IV. — Géométrie analytique à deux dimensions (et Géométrie supérieure).

V. — Géométrie analytique à trois dimensions (et Géométrie supérieure).

VI. — Géométrie du triangle.

A l'usage des candidats à la Licence.

VII. — Calcul infinitésimal et Calcul des fonctions. — Mécanique. — Astronomie.

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A DEUX DIMENSIONS

(ET GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE)

A L'USAGE DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès sciences,

Ancien élève de l'École Polytechnique.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

AVERTISSEMENT.

Les Questions dont on trouvera les énoncés dans ce livre sont extraites des principaux recueils mathématiques périodiques publiés en langue française depuis la création des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, c'est-à-dire depuis 1842. Je n'ai eu d'autre mérite que d'en faire une classification, mais je crois par ce travail de patience avoir rendu un service réel aux professeurs et aux élèves. Ces problèmes représentent en quelque sorte le résumé des travaux mathématiques d'un demi-siècle. Presque tous intéressants, quelques-uns sont dus à des Géomètres illustres, et méritent d'attirer l'attention, non seulement en ce qui concerne l'enseignement, mais aussi en ce qui concerne la science pure. Et cependant, épars dans des collections dont quelques-unes sont rares aujourd'hui, ils étaient devenus presque introuvables, surtout pour les élèves.

Autant que possible, j'ai cité les noms des auteurs des questions, et aussi le recueil auquel chacune d'elles est empruntée. En outre, j'ai indiqué les solutions publiées par un système de renvois abréviatifs, afin de permettre, en cherchant dans les collections des bibliothèques, de retrouver une solution qu'on désirerait étudier. On verra ci-dessous l'explication de ces renvois.

Lorsque plusieurs solutions ont été publiées et qu'elles sont également bonnes, le nom indiqué est généralement celui de l'auteur de la première solution.

Quand une question a été généralisée, l'énoncé qu'on trouvera est habituellement celui qui résulte de la généralisation. Quelquefois une Note indiquera simplement que la question a été généralisée.

Malgré tout le soin et l'attention que j'ai mis à contrôler et à vérifier la correspondance entre les énoncés et les solutions, quelques erreurs ou quelques doubles emplois ont pu néanmoins subsister. Je m'en excuse d'avance et j'accueillerai avec reconnaissance les rectifications qui me seraient adressées à ce sujet.

Les questions dépourvues d'indications de solutions n'ont pas été résolues, ou du moins je n'en ai pas trouvé de solutions dans les différents recueils où j'ai fait d'attentives recherches. Parmi ces Exercices, il en est un certain nombre dont la difficulté semble expliquer l'absence de solution; nous en avons fait précéder l'énoncé d'un astérisque. Nous avons également marqué d'un astérisque les questions non résolues qui, sans être très difficiles, paraissent présenter un intérêt particulier et méritent de nouvelles recherches.

C.-A. Laisant.

Nota. — Pour toutes les questions non résolues, je recevrai les solutions que les lecteurs croiraient devoir m'adresser (à la librairie Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris), et je me ferai un plaisir de les transmettre aux divers journaux pouvant les insérer.

Les solutions des questions provenant du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* prendront naturellement place dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* ou le *Journal de Mathématiques spéciales,* suivant leur nature. Celles provenant de la *Nouvelle Correspondance mathématique* seront accueillies par la rédaction de *Mathesis*.

ABRÉVIATIONS ET RENVOIS.

N. A. — *Nouvelles Annales de Mathématiques* (depuis 1842, fondation).

N. C. — *Nouvelle Correspondance mathématique* de M. Catalan. (Collection complète en 6 volumes; 1875-80.)

J. M. — *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* de Bourget. (Collection complète en 5 volumes: 1877-1881.)

J. E. — *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps (depuis 1882, continuation du J. M.).

J. S. — *Journal de Mathématiques spéciales* de M. de Longchamps (depuis 1882, continuation du J. M.).

M. — *Mathesis* (depuis 1881, fondation) (1).

L'indication qui suit immédiatement un énoncé comprend le nom de l'auteur en PETITES CAPITALES, le titre du Recueil auquel l'énoncé est emprunté, et le numéro de cette question dans le Recueil. Par exemple,

(CHASLES, N. A., 83)

signifie que la question a été posée par Chasles et qu'elle occupe le n° 83 dans les *Nouvelles Annales*. S'il n'y a pas de nom d'auteur, c'est que celui-ci est resté inconnu, ou que les rédacteurs en ont pris le patronage. L'indication des solutions se trouve au-dessous de l'énoncé et vers la gauche; elle comprend le nom de l'auteur (ou des auteurs) d'une au moins des solutions, en *italiques*, le millésime (réduit aux deux derniers chiffres) de l'année de la publication du

(1) En fait, le journal *Mathesis*, dirigé par MM. Mansion et Neuberg, a recueilli et continué la tradition scientifique de la N. C.

tome, en **caractères gras**, et le numéro de la page où l'on peut retrouver la solution. Par exemple, l'indication

(*Jamet*, **78**, 296),

au-dessous d'une question extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, signifie que la solution en a été publiée par M. Jamet dans l'année 1878 du même Recueil, à la page 296.

S'il arrive exceptionnellement qu'une question extraite d'un Recueil ait été résolue dans un autre, l'indication le fera également connaître. Ainsi

(*Brocard*, M., **82**, 248)

au-dessous d'une question extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, signifie que la solution en a été publiée par M. Brocard dans *Mathesis*, année 1882, page 248.

Si plusieurs solutions ont été publiées, les renvois le feront connaître; mais on n'indiquera généralement que les noms d'un ou de deux auteurs des solutions.

OBSERVATION SPÉCIALE AU PRÉSENT VOLUME.

Les Énoncés qui sont reproduits dans ce Volume se rapportent surtout à la Géométrie analytique à deux dimensions et parfois à la Géométrie supérieure. Parmi ces questions un certain nombre peuvent être résolues soit analytiquement, soit par la Géométrie. On y fait figurer tous les problèmes concernant la courbure, les enveloppes, les trajectoires de figures mobiles, les aires et d'autres encore qui peuvent exiger quelques connaissances en Calcul infinitésimal, mais qui ne dépassent pas cependant les limites ordinaires des cours de Mathématiques spéciales, aujourd'hui surtout que les premiers principes de ce calcul ont été introduits dans les programmes.

La table des matières indiquera complètement la classification adoptée. Je me suis beaucoup moins attaché, dans cette classification, à suivre un ordre logique et méthodique qu'à faciliter les recherches.

Une question quelconque tombant sous les yeux du lecteur, mon but a été de lui permettre de la retrouver presque immédiatement dans le volume si elle y figure. Il ne faudrait pas s'imaginer, par exemple, que les questions sont graduées en raison de la difficulté qu'elles présentent. C'est en quelque sorte un dictionnaire permettant de faire des recherches faciles plutôt qu'une suite raisonnée d'exercices. Mais il semble que, par le jeu des divisions principales et des nombreuses sous-divisions, les recherches dont il s'agit seront toujours extrêmement rapides. Les cas où il pourrait y avoir

lieu à hésitation sont peu nombreux et, même alors, l'incertitude ne peut guère exister qu'entre deux catégories; de sorte que, les questions rentrant dans chaque catégorie étant en petit nombre, on aura bientôt trouvé l'énoncé que l'on cherche.

En principe, un énoncé, rentrant dans deux catégories à la fois, a plutôt été placé dans la catégorie la plus éloignée, à moins d'exceptions motivées par des raisons spéciales.

Je tiens à remercier publiquement ici mon excellent ami, le commandant Brocard, pour les conseils précieux qu'il m'a donnés en vue de la publication de ce Recueil, et pour le concours personnel qu'il m'a spécialement apporté dans la préparation du présent Volume.

NOTA. — Les énoncés que contient ce volume ont été relevés jusqu'au mois de *Décembre* 1891 *inclusivement,* dans les divers recueils périodiques.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A DEUX DIMENSIONS

(ET GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE).

PREMIÈRE PARTIE.

FIGURES RECTILIGNES ET CIRCULAIRES.

FIGURES RECTILIGNES.

Rapport anharmonique. — Divisions et faisceaux homographiques.

1. Quatre points étant donnés sur une droite, prenant ces points deux à deux, on obtient trois systèmes de deux couples chacun, et à chacun de ces systèmes correspond sur la droite un couple de points simultanément harmonique aux deux couples du système; les trois couples ainsi déterminés, pris deux à deux, sont harmoniques entre eux.

Cette propriété donne la résolution des équations biquadratiques. (Hesse, N. A., 250.)

(*Rey*, **52**, 449.)

2. Soient donnés dans un même plan : 1° cinq points sur une

droite A; 2° cinq droites. Mener une transversale qui coupe les cinq droites en cinq points qui soient homographiques aux cinq points de la droite A; démontrer qu'il n'existe qu'une seule transversale qui remplisse cette condition. (CHASLES, N. A., **304**.)

(*Poudra,* **55**, 311.)

3. On donne dans le même plan deux systèmes de sept points chacun et qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques. Démontrer qu'il n'y a que trois solutions. (CHASLES, N. A., **296**.)

(*De Jonquières, Cremona,* **55**, 142; **56**, 58; **58**, 399; **59**, 64; **61**, 452.)

4. Deux divisions homographiques se trouvent sur la même droite. Au point *a* de la première division correspond le point *b* de la seconde; au point *b*, pris dans la première division, correspond le point *c* de la seconde; au point *c* de la première division correspond le point *d* de la seconde, et ainsi de suite. On obtient ainsi une série indéfinie de points *a*, *b*, *c*, *d*, ... Prouver que ces points se rapprochent indéfiniment d'un des points doubles des divisions homographiques, ces points doubles étant supposés réels. (EM. WEYR, N. A., **991**.)

(*Clavenad,* **70**, 424.)

5. Deux droites qui se coupent en un point O sous un angle de 30° forment avec les droites isotropes menées par O un faisceau équianharmonique, c'est-à-dire tel que les trois rapports anharmoniques fondamentaux du faisceau sont égaux. En conclure une construction simple du point qui, avec trois points donnés, dont deux sont imaginaires conjugués, forme un groupe équianharmonique. (RETALI, M., **647**.)

(*Klompers,* **90**, 233.)

6. Soit O le milieu de la distance des points doubles de deux séries projectives superposées déterminées par les trois couples de points correspondants m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1. Si μ_2, μ_3 sont

les milieux des segments m_1m_3, m_1m_2, démontrer que

$$(Om_1m_2m_3) = -\frac{\mu_2 m_2}{\mu_3 m_3}.\quad \text{(Servais, M., 722.)}$$

(*Verbessem*, **91**, 239.)

7. On donne trois points en ligne droite M_1, M_2, M_3. Soient N_1, N_2, N_3 les conjugués harmoniques d'un quatrième point A de cette droite par rapport aux couples M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2. Les abscisses des points M étant données par l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

et celle de A étant α, trouver l'équation aux abscisses des points N. (Le Paige, M., 191.)

(*Bastin*, **84**, 206).

Systèmes de points ou de droites.

8. Soit un faisceau de n droites convergentes au point O, et $n-1$ points X_1, X_2, ..., X_{n-1} en ligne droite, le tout dans un même plan; prenez sur OA_1, la première du faisceau, arbitrairement les points A_1, B_1, C_1, ..., en nombre quelconque; du point X_1 comme centre, projetez ces points sur la seconde droite du faisceau, en A_2, B_2, C_2, ...; du point X_2 comme centre, projetez ces derniers sur la troisième ligne du faisceau en A_3, B_3, C_3, ...; du point X_3 comme centre, projetez ces derniers sur la quatrième ligne, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les points X_1, X_2, ..., X_{n+1} aient été employés. Soient A_n, B_n, C_n, ... les dernières projections obtenues du point X_{n+1} comme centre. Les droites A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n, ... concourent en un même point situé sur la droite X_1, X_{n+1}.

Si $n = 3$ et X_1 restant fixe, on suppose que X_2 décrive une conique, quel sera le lieu décrit par le point de concours des droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3, ...? (Finck, N. A., 53.)

[*P. Serret* (1), **47**, 46.]

---

(1) Généralisation.

9. n points a_1, a_2, a_3, ..., a_n sont placés sur une droite; n autres points b_1, b_2, b_3, ..., b_n sont placés sur une autre droite : dans quel cas pourra-t-on mettre les deux droites dans une telle position, que les lignes de jonction $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., $a_n b_n$ convergent vers le même point? (STEINER, N. A., 223.)

(*Jullien*, **50**, 265).

10. n droites a_1, a_2, a_3, ..., a_n forment un faisceau plan; n autres droites b_1, b_2, b_3, ..., b_n forment un second faisceau plan : dans quel cas pourra-t-on donner aux faisceaux une position telle, que les n intersections des rayons a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_n, b_n soient sur une même droite?

Mêmes données; dans quel cas pourra-t-on donner aux faisceaux une position telle dans l'espace que les plans passant par les rayons a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_n, b_n se coupent suivant la même droite? (STEINER, N. A., 224, 225.)

(*Claude*, **50**, 351.)

11. Soient A, B, C trois points fixes,

$$AB = c, \qquad BC = a, \qquad CA = b,$$

α, β, γ les distances respectives des trois points à une droite fixe; on a

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\alpha\beta$$
$$- (b^2 + c^2 - a^2)\beta\gamma - (c^2 + a^2 - b^2)\gamma\alpha = 4S^2;$$

S = aire du triangle ABC. (SALMON, N. A., 478.)

(*Wiart*, **60**, 283; **61**, 88.)

*12. Déterminer dans un plan deux systèmes de neuf points conjugués

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_8, \ a_9,$$
$$b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_8, \ b_9,$$

jouissant de la propriété qu'étant pris au hasard deux couples de points correspondants a_i et b_i, a_j et b_j, il existe toujours un autre couple de points correspondants a_k et b_k et un seul, tel

que les deux triangles $a_i a_j a_k$ et $b_i b_j b_k$ soient semblables. (LAGUERRE, N. A., **793**.)

13. Étant données sur un plan deux figures composées : l'une du point O et des droites A et B; l'autre du point O' et des droites A' et B', mener par chacun des points donnés une transversale telle, que les segments compris sur l'une entre le point O et les droites A et B soient égaux aux segments compris sur l'autre entre le point O' et les droites A' et B'.

Même problème en remplaçant dans chaque figure les droites par des circonférences passant par le point donné. (FOURET, N. A., **935**.)

(*Netto*, **69**, 518, 520.)

14. Trouver l'équation du système des perpendiculaires abaissées du point (x', y') sur les droites

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0;$$

les axes sont rectangulaires. (J. M., **293**.)

(*Lormeau*, J. E., **91**, 35.)

15. Étant donnés n points A_1, A_2, ..., A_n, on peut trouver une infinité de systèmes de quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, tels que la somme des carrés des distances des points M à un plan quelconque soit dans un rapport constant avec la somme des carrés des distances des points A au même plan.

L'un des points M peut être pris arbitrairement; les trois autres sont alors déterminés. (BARBARIN, M., **310**) ([1]).

(*Neuberg*, **91**, 226.)

16. Soient (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{m-1}, y_{m-1}) les coordonnées des m points A_0, A_1, ..., A_{m-1}. Soient B_0, B_1, ...,

---

([1]) Sous cette forme, l'énoncé 15 n'est pas exact. Nous avons cru néanmoins devoir le maintenir, parce qu'il a provoqué le très intéressant article de M. Neuberg que nous signalons. Cette question se rapporte à la théorie des moments d'inertie et des *images d'inertie*.



B_{m-1} les points qui divisent les droites A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{m-1}A_0$ dans le rapport $n:1$; C_0, C_1, ..., C_{m-1} les points qui divisent les droites B_0B_1, B_1B_2, ..., $B_{m-1}B_0$ dans le rapport $n:1$; et ainsi de suite. Les coordonnées du $q^{\text{ième}}$ point du $p^{\text{ième}}$ groupe de m points sont

$$\frac{x^{q-1}(1+nx)^p}{(1+n)^p}, \quad \frac{y^{q-1}(1+ny)^p}{(1+n)^p}.$$

pourvu que l'on remplace x^t, y^t par x_r, y_r, r étant le reste de la division de t par m. (NEUBERG, M., 275.)

(*Lambert*, **86**, 159.)

Triangles.

17. Connaissant les coordonnées des trois sommets d'un triangle, quelles relations doivent exister entre ces coordonnées et celles d'un quatrième point, pour que celui-ci soit dans l'intérieur du triangle? (N. A., 65.)

(*Laisant*, **76**, 511.)

18. Soient ABC un triangle isoscèle dont chacun des deux angles A, B a pour mesure arc tang $2\sqrt{2}$; p, q, r les longueurs des perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C sur une ligne droite quelconque située dans le plan du triangle : mener par un point donné une droite telle, que la somme algébrique

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{2}{r}=0. \quad \text{(N. A., 675.)}$$

(*Laisant*, **66**, 461.)

19. Les sommets B, C du triangle ABC sont fixes, et le troisième se meut sur une droite. Démontrer que les sommets et le centre du carré inscrit dont un côté repose sur BC décrivent des droites. (NEUBERG, M., 351.)

(*Neuberg*, **86**, 89.)

20. Les sommets B, C du triangle ABC sont fixes, et le troisième parcourt une droite. Les sommets du carré inscrit dont un côté repose sur BA décrivent des coniques. (NEUBERG, M., **352**.)

(*Jerabek*, **86**, 91.)

21. Dans un triangle donné ABC, on mène par un point quelconque M du côté BC les droites MN, MP parallèles à deux directions données et rencontrant respectivement AB en N, AC en P. Trouver le minimum de NP. (JENKINS, M., **470**.)

(*Déprez*, **87**, 202.)

Polygones et autres figures rectilignes.

22. Si, dans l'angle de deux droites prises pour axes de coordonnées, on inscrit une ligne polygonale régulière, ayant l'origine pour centre, on aura entre les abscisses à l'origine x', x'', x''', ..., $x^{(n)}$, des côtés du polygone, et l'ordonnée Y du premier sommet à partir de l'axe des x, la relation

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \frac{1}{x'''} + \ldots + \frac{1}{x^{(n)}}.$$ (PROUHET, N. A., **96**.)

(**46**, 199.)

23. Le produit des coordonnées du centre d'un polygone régulier, rapporté à deux axes rectangulaires, est la moyenne arithmétique des produits des coordonnées de ses sommets.

(CESARO, N. C., **503**.)

(*Mangon*, **80**, 84.)

24. Soit ABCD un quadrilatère coupé par une transversale en α sur le côté AB et en β sur le côté opposé CD; soient α' le conjugué harmonique de α par rapport aux points A, B, et β' le conjugué harmonique de β par rapport aux points C, D; menons la droite $\alpha'\beta'$; faisons une construction analogue sur les côtés

opposés AC, BD et sur les diagonales AD, BC : les trois droites passent par le même point. (DE LAFITTE, N. A., **353**.)

[*Armand Silvestre* [1], **57**, 25, 173.]

25. Soit un point fixe O dans le plan d'un quadrilatère. On construit par rapport à ce point les polaires des sommets opposés A et D, et le point d'intersection de ces polaires; on fait la même opération par rapport aux sommets opposés B et C et par rapport aux points de concours des côtés opposés; les trois points d'intersection sont en ligne droite. (DE LAFITTE, N. A., **354**.)

(*Armand Silvestre*, **57**, 24, 173.)

26. Par le point fixe O on mène des rayons vecteurs aux six points milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère; par chaque point milieu, on mène une parallèle au rayon vecteur qui va au côté opposé : les six parallèles se coupent en un même point. (DE LAFITTE, N. A., **355**.)

(*Roussin*, **57**, 55.)

27. Étant donné un quadrilatère, on joint un point quelconque I de son plan à un autre point F, également quelconque dans le même plan, et l'on projette les quatre sommets du quadrilatère sur IF. On multiplie ensuite la distance du point I à la projection de l'un des sommets, par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets. Prouver que la somme des produits relatifs à deux sommets opposés est égale à la somme des deux autres. (ANTOMARI, J. S., **83**.)

(*A. Lévy*, **88**, 238.)

---

[1] Quelques lecteurs seront peut-être étonnés de trouver ici ce nom, si connu aujourd'hui dans un ordre d'idées bien étranger aux Mathématiques. Nous croyons devoir rappeler que le conteur plein de verve, le poète délicat et charmant qui s'appelle Armand Silvestre est un ancien élève de l'École Polytechnique (promotion de 1857), et un ancien collaborateur des *Nouvelles Annales;* c'est une démonstration vivante de cette vérité, que l'intelligence scientifique peut très bien s'allier aux talents littéraires, et que la culture des Mathématiques est loin d'atrophier l'imagination.

28. Connaissant les centres des carrés construits extérieurement sur les cinq côtés d'un pentagone, construire ce pentagone. (LAISANT, N. C., 302.)

(*Van Aubel*, **78**, 43.)

29. Étant donné un polygone $A_1, A_2, \ldots, A_n$, déterminer la position d'un point $A_0(x_0 y_0)$ dont les coordonnées satisfont aux équations

$$y_0 - ny_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} y_2 - \ldots \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} \mp ny_{n-1} \pm y_n = 0,$$

$$x_0 - nx_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} x_2 - \ldots \qquad \mp nx_{n-1} \pm x_n = 0.$$

Démontrer par le calcul et la Géométrie que la position de ce point est indépendante du choix des axes de coordonnées.

(SARTIAUX, N. A., 915.)

(*Kruschwitz*, **69**, 539.)

30. Soient

P un point fixe;

$A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ une série de points équidistants, en ligne droite.

Sur les côtés successifs d'un polygone de n côtés, on construit des triangles semblables à A_2PA_1, A_3PA_2, ..., $A_{n+1}PA_n$, les bases appliquées sur les côtés du polygone étant homologues de A_2A_1, ..., $A_{n+1}A_n$.

Démontrer que le centre des moyennes distances des sommets homologues de P est un des sommets du polygone.

(LAISANT, N. C., 318.)

(*Van Aubel*, **78**, 93.)

31. L'aire d'un polygone de m côtés est égale à la *somme* des $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ triangles que l'on peut former avec $m-1$ de ses côtés combinés deux à deux; chacun de ces triangles ayant

deux de ses côtés égaux aux côtés correspondants du polygone et dirigés de la même manière. (BELLAVITIS, N. A., 948.)

(*Callandreau*, **71**, 424.)

32. On donne, dans un plan, deux polygones homothétiques. Soient a, b, c, ... les côtés de l'un d'eux et x, y, z, ... les distances des côtés homologues. Démontrer que la quantité $ax + by + cz \ldots$ reste constante lorsque les deux polygones se déplacent. Théorème analogue pour deux polyèdres homothétiques (en remplaçant les côtés des polygones précédents par les faces des polyèdres). (FAUQUEMBERGUE, M., 489.)

(*Choisis*, **86**, 119.)

33. Étant donnés deux axes OY, OX, perpendiculaires entre eux, soient construits, sur l'angle droit YOX, autant de rectangles que l'on voudra OACB, OA′C′B′, OA″B″C″, ..., dont les côtés présentent la même différence de longueur; si des sommets C, C′, C″, ..., on abaisse des perpendiculaires sur les diagonales AB, A′B′, A″B″, ..., opposées à l'angle commun O, et qu'on les prolonge suffisamment, elles iront toutes se couper en un même point. (N. A., 64.)

(*Merlieux*, **43**, 314.)

34. On donne sur la droite OX les points A, B et sur la droite OU les points C, D. Soit S le centre de similitude de deux figures semblables construites sur AB, CD. Cela posé : 1° si l'on fait glisser le segment CD sur OU, le point S décrit une droite; 2° si l'on fait tourner OU autour de O, le point S décrit une circonférence. (NEUBERG, M., 512.)

(*Déprez*, **86**, 236.)

FIGURES CIRCULAIRES.

—

Une ou deux circonférences.

35. On donne un cercle et deux points. Inscrire dans le cercle un triangle isoscèle dont les deux côtés égaux passent par les deux points donnés. (LEMOINE, N. A., 874.)

(*Béziat*, **70**, 133, 423.)

36. Étant donnés n points sur un cercle, on peut trouver 3, 4, ... $(n-1)$ contours polygonaux fermés de n côtés ayant ces points pour sommets. Si, d'un même point du cercle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de tous ces contours, le produit des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un contour quelconque est le même pour tous les contours.

(D. ANDRÉ, N. A., 940.)

(*Moret-Blanc*, **70**, 332.)

37. On considère un cercle Δ et un diamètre AB de ce cercle; ayant pris sur AB, entre les points A et B, un point fixe C, on trace, du même côté du diamètre, deux droites rencontrant le cercle aux points D, E. On suppose ces droites mobiles, mais à chaque instant symétriques par rapport à la perpendiculaire CZ au diamètre AB; enfin on mène aux points D, E, les tangentes au cercle Δ, tangentes qui se rencontrent au point F. On propose de démontrer les propriétés suivantes de la figure ainsi formée :

1° Le quadrilatère CDEF est inscriptible;

2° Le lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère est une droite;

3° Le lieu décrit par le point F est une droite;

4° La droite DE passe par un point fixe;

5° Le triangle CDE est maximum quand il est rectangle;

6° Le lieu décrit par le point de concours des droites AD, BE est une droite. (De Longchamps, J. M., **389**.)

(*Mayon*, J. E., **82**, 39.)

38. Les lignes

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + my + n = 0, \quad mx - y + n' = 0$$

forment un quadrilatère inscriptible; trouver le rayon du cercle circonscrit. (J. M., **294**.)

(**81**, 334.)

39. On joint un point quelconque M d'une circonférence au centre O et à un point fixe A. Trouver l'aire de la courbe décrite par le point d'intersection du rayon OM et de la perpendiculaire élevée par A sur AM. (Jerabek, M., **314**.)

(*Boubals*, **85**, 110.)

40. On donne une circonférence Δ, un diamètre AB et une perpendiculaire Δ' à AB. Une droite quelconque menée par A coupe Δ en M, Δ' en N. On tire par M une perpendiculaire à AB, et par N une parallèle à AB. Ces droites se rencontrent en un point P. Trouver les points d'inflexion de la courbe décrite par P. Même question lorsque Δ' est parallèle à AB et que MP, NP sont respectivement parallèle et perpendiculaire à AB. (Neuberg, M., **739**.)

(*Absolonne*, **92**, 52.)

41. Deux cercles concentriques ayant pour rayons r et $r\sqrt{-1}$ se coupent à angle droit. Démontrer et expliquer ce résultat d'apparence paradoxale. (N. A., **375**.)

(**57**, 290.)

42. Soit ABCD un quadrilatère inscriptible. Désignons par A_1 la surface du triangle BCD, et par P_1 la puissance du point A par rapport à un cercle quelconque situé dans le plan du quadrilatère. Désignons de même par B_1 et P_2 les quantités

analogues pour le point B, etc. Prouver que l'on a la relation $A_1P_1 - B_1P_2 + C_1P_3 - D_1P_4 = 0$. Déduire de là les propriétés du quadrilatère inscriptible.

Un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est inscrit dans un cercle O. Soit O' le cercle passant par A_1A_2 et tangent au côté A_1A_4. Le côté A_2A_3 rencontre ce cercle en un second point I. Prouver que l'on a

$$\frac{A_1A_3}{A_2A_4} = \frac{IA_3}{A_1A_4}.$$ (Antomari, J. S., 78, 79.)

(*Barthe*, **87**, 230.)

43. On donne deux cercles qui se coupent au point O; on mène par ce point une transversale qui coupe l'un des cercles en M, l'autre en M'. Soit P le conjugué harmonique de O par rapport à M et à M'. Démontrer que, quand la transversale tourne autour de O, le point P décrit une strophoïde dont le point double est en O. Déterminer le cercle osculateur en O.

(Dewulf, M., 575.)

(*Meurice*, **91**, 21.)

44. On considère un triangle ABC, et sur la base BC de ce triangle, on prend un point M; par ce point on fait passer un cercle Δ tangent à AB au point B, et un cercle Δ' tangent à AC au point C. On demande de démontrer :

1° Que si le point M est le point de contact du cercle inscrit au triangle, les deux cercles Δ, Δ' ont une tangente commune parallèle à BC et égale à la moitié de BC;

2° Que si le point M est le milieu de BC, les deux cercles Δ et Δ' sont vus du point A sous le même angle;

3° Que si le point M est le symétrique du pied de la hauteur par rapport au milieu de BC, la ligne des centres est parallèle à BC;

4° Que si le point M est le symétrique du pied de la bissectrice par rapport au milieu de BC, les deux cercles sont égaux.

Étudiant en particulier cette dernière figure, on fera voir qu'elle jouit des propriétés suivantes :

I. Les deux cercles Δ, Δ' se coupent sur la bissectrice de l'angle BAC.

II. Les deux cercles se coupent sous un angle égal à l'angle BAC.

III. Si, par le point M on mène des cordes parallèles aux côtés du triangle, savoir : dans Δ une corde parallèle à AC et dans Δ' une corde parallèle à AB, ces cordes sont égales et leur longueur commune est AC — AB. (DE LONGCHAMPS, J. M., **393**.)

(*Baron, J. E.*, **82**, 67.)

*45. On donne la distance des centres et lès rayons de deux circonférences C et C' intérieures l'une à l'autre. Une droite AB, de longueur constante, se déplace de manière que ses extrémités A et B restent respectivement sur C et sur C' : on demande l'expression de la surface comprise entre une position initiale et une position finale de la droite AB et les deux circonférences. En déduire la position finale de la droite AB pour que l'aire correspondant à un déplacement de 120° sur la circonférence intérieure soit maximum. (VANDENPEEREBOOM, N. A., **1307**.)

*46. Un polygone étant inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre cercle, démontrer que : 1° le centre des moyennes distances de ses sommets est situé sur la droite qui unit les centres des deux cercles; 2° la surface du polygone est égale à la somme des sinus de ses angles multipliée par la moitié de la puissance du centre du cercle inscrit, prise par rapport au cercle circonscrit, prise en signe contraire. (FAURE, N. A., **711**.)

Plus de deux circonférences.

47. Trois circonférences ω, ω', ω'' ont une corde commune AB. Démontrer qu'il existe une infinité d'hexagones CC'C''DD'D'' dont les sommets opposés C et D, C' et D', C'' et D'' sont situés respectivement, sur les circonférences ω, ω', ω'' et dont les côtés passent alternativement par A et B.

Transformer la proposition par projection centrale, par polaires réciproques et par inversion. (CATALAN, M., **613**.)

(*Schoute*, **90**, 42.)

48. Soient ABCD un rectangle inscrit dans la circonférence O; E le milieu de AD; G le point de rencontre de la circonférence avec la droite CE; F un point quelconque de la diagonale DB et K sa projection sur AD; I le milieu du segment AK. 1° L'angle GIF = GAB. 2° Si par F on mène une parallèle à AD, rencontrant CE en N et BE en M, les cinq points F, N, D, G, T sont sur une même circonférence tangente à FA. 3° Si GF rencontre la circonférence ABCD en P, le quadrilatère BMFP est inscriptible, et les points A, M, P sont sur une parallèle à FI. 4° Les droites FI, AB se rencontrent sur la circonférence circonscrite au triangle AIG. (M., **701**.)

(*Cristesco,* **91**, 203.)

49. Étant données trois circonférences, mener à l'une d'elles en un point B, à déterminer, une tangente rencontrant les deux autres en deux points A, C, tels que AB = BC. (M., **94**.)

(*Brocard,* **86**, 228.)

50. Décrire une circonférence touchant deux circonférences données et coupant une droite donnée sous un angle donné. [Pascal, (1) M., **177**.]

(*Barbarin,* **83**, 126.)

51. Le pôle étant placé au centre de similitude du cercle

$$\rho^2 - 2\rho a \cos(\theta - \alpha) + a^2 = r^2$$

et du cercle de rayon mr, trouver l'équation de l'axe radical, et celle du cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés, et dont le centre a pour angle polaire β. (J. M., **295**.)

(*Quiquet,* **81**, 383.)

52. Trois cercles étant donnés dans un même plan, construisant un cercle coupant rectangulairement l'un des cercles donnés

(1) Œuvres de Pascal. Lettre de Sluze à Pascal.

et passant par les intersections des deux autres, les trois nouveaux cercles passent par les deux mêmes points.

(PLÜCKER, N. A., **195**.)

(*Jullien, Dewulf*, **52**, 398; **58**, 79, 194.)

53. Soient

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = 0, \qquad U_3 = 0$$

les équations rendues homogènes de trois cercles; l'équation du cercle qui coupe ces trois cercles à angle droit est donnée par cette relation

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$ (SALMON, N. A., **406**.)

(*Souillart*, **59**, 224, 230, 237; **63**, 22.)

***54.** On donne sur une droite deux systèmes de trois points a, a', a'' et b, b', b'' qui font partie d'une division homographique. Sur ab comme diamètre on décrit un cycle C dont le sens est déterminé par la condition qu'au-dessus de la droite le point décrivant aille de a en b; les segments $a'b'$ et $a''b''$ déterminent de même deux autres cycles C′ et C″. Si l'on trace un cycle tangent à C, C′ et C″, démontrer que les points où il coupe la droite sont les deux points doubles de la division homographique.

(LAGUERRE, N. A., **1484**.)

55. On considère les quatre triangles formés par une diagonale et deux côtés consécutifs d'un quadrilatère inscrit; puis l'on construit les quatre droites de Simson, relatives à chacun de ces triangles, pris avec le sommet restant : 1° ces quatre droites passent en un même point I; 2° les circonférences des neuf

points, relatives aux quatre triangles, passent en ce point I. (BRAUN, N. C., 434) ([1]).

(*Figa Bartolomeo*, N. A., **69**, 174, 317.)

*56. Traiter, par le système des coordonnées tricirculaires, le problème de Malfatti, généralisé par Steiner. (E. LUCAS, N. C., 153.)

*57. Donner les rayons des cercles circonscrits au tricycle de référence. (E. LUCAS, N. C., 154.)

*58. Quelles sont les conditions pour que l'équation générale du second degré représente un système de deux cercles réciproques? Montrer l'analogie avec la théorie des cônes de révolution. (E. LUCAS, N. C., 155.)

*59. Trouver l'angle des tangentes communes, d'un système de deux cercles réciproques, donné par l'équation générale du second degré. (E. LUCAS, N. C., 156.)

*60. Trouver l'équation des cycles joignant les sommets du tricycle aux milieux des côtés opposés. (E. LUCAS, N. C., 157.)

*61. Trouver les rayons du système des deux cercles réciproques, conjugué au tricycle de référence. (E. LUCAS, N. C., 158.)

*62. Déterminer l'angle, le rayon et la position du centre d'un cercle qui coupe, sous le même angle, quatre cercles donnés. (E. LUCAS, N. C., 413.)

63. On donne trois cercles A, B, C; déterminer les rayons et les équations de trois cercles x, y, z, tangents entre eux deux à

([1]) *Voir* N. A., question 908.

deux, et tels que x et y coupent le cercle C sous des angles γ et γ', que y et z coupent le cercle A sous des angles β et β'.

(E. Lucas, N. C., **415**) [1].

(N. C., **76**, 225, 257, 289; **77**, 225, 257.)

---

[1] Sur les questions 56 à 63, le lecteur consultera avec profit une très intéressante étude d'Édouard Lucas : *Principes de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique*.

DEUXIÈME PARTIE.

CONIQUES.

UNE ELLIPSE. — PROPRIÉTÉS.

Tangentes.

64. Supposons trois points m', m'', m''' sur une ellipse; menons par les points m', m'' des tangentes à cette courbe, que nous supposerons se couper en un point T.

Joignons le point m'' au point m''', et par le point T menons une sécante parallèle à la corde $m''m'''$; cela fait, si l'on joint le point m''' au point m', la ligne de jonction $m'''m'$ passe au milieu de la corde, interceptée sur la sécante partant du point T et parallèle à $m''m'''$.

Cette proposition fera trouver le centre d'une ellipse lorsqu'on connaîtra trois points de cette courbe et deux tangentes en deux des points donnés. (Brassine, N. A., 151.)

(*Ritt, Mannheim,* **47**, 388; **48**, 260; **49**, 89.)

65. Soient OA, OB les demi-axes d'une ellipse dont le centre est O; ANC la circonférence décrite du point O comme centre avec OA pour rayon; MN une perpendiculaire à l'axe OA, rencontrant l'ellipse au point M, et la circonférence ANC en N; P le point où l'ellipse est rencontrée par le rayon ON, et Q le point de rencontre de la circonférence et d'une perpendiculaire à l'axe OA, menée par P : si l'on prend OR = OP sur la direc-

tion du rayon OQ, la droite RM sera tangente à l'ellipse et perpendiculaire à OR. (SACCHI, N. A., 655.)

(*Cornille,* **63**, 454.)

66. Le minimum d'une tangente à l'ellipse, comprise entre les axes, est égal à la demi-somme $(a + b)$ des axes.

Le maximum de la distance du point de contact d'une tangente à l'ellipse à la projection du centre sur cette tangente est égal à la demi-différence $(a - b)$ des axes.

(WILLIAMSON, N. A., 1095, 1096.)

(*Lez*, **73**, 44, 45.)

67. On considère une ellipse et le cercle lieu des sommets des angles droits qu'on peut lui circonscrire. Par un point P, extérieur à l'ellipse, on mène les deux tangentes PA et PB à l'ellipse. On prolonge la corde des contacts AB jusqu'à sa rencontre en C et D avec le cercle. Faire voir analytiquement et géométriquement que les angles CPA, BPD sont égaux. (J. M., 312.)

(*Du Motel,* **81**, 427.)

Normales.

68. A, B, C, D sont quatre points pris sur une ellipse, et tels que les normales en ces points se rencontrent en un même point. Faisant passer une circonférence par trois quelconques A, B, C de ces points, cette circonférence coupera l'ellipse encore une fois en un point D' diamétralement opposé au point D.

(JOACHIMSTHAL, N. A., 149.)

(*De Perrodil*, **47**, 367.)

69. Soient a un point pris hors d'une ellipse, et bc la corde polaire de ce point. Soit a' un point sur le même diamètre que a et à égale distance du centre; abaissant de ce point les perpendiculaires $a'p$, $a'q$ sur les axes principaux, la droite pq prolongée coupe l'ellipse en deux points b', c'; les quatre normales

qui passent par b, c, b', c' se rencontrent en un même point. (Joachimsthal, N. A., 150.)

(*De Perrodil*, **47**, 369.)

70. 1° Le segment intercepté sur une normale *quelconque* à une ellipse par les deux axes étant multiplié par la distance p du centre à la tangente adjacente à sa normale donne un produit constant; 2° le segment intercepté sur une normale quelconque à une ellipse par un cercle concentrique d'un rayon égal à la demi-somme des axes et multiplié par la distance p donne un produit constant. (Heilermann, N. A., 517.)

(*Prat*, **60**, 235.)

71. Soient P, Q les intersections respectives d'une normale à une ellipse par les axes a et b. Si, à partir de l'origine m de la normale, on prend des longueurs égales mS_1, mS_2, telles, que mS_1 soit égal au demi-diamètre parallèle à la tangente, les quatre points S_1, P, S_2, Q sont placés harmoniquement; les lieux de S_1, S_2 sont deux cercles concentriques à l'ellipse décrite des rayons $a \pm b$. (Heilermann, N. A., 520.)

(*Prat*, **60**, 239.)

72. Par un point quelconque M, pris sur une ellipse, on mène la normale, qui rencontre les axes en P et Q.

Sur le prolongement de la normale, on prend $MP' = MP$; sur $P'Q$ comme diamètre, on décrit un cercle qui rencontre au point N la tangente conduite par le point M. Par le point N, on mène une parallèle à la normale, et par le centre O une parallèle à la tangente.

Le rectangle $MNM'N'$ *ainsi obtenu est constant et équivaut au rectangle construit sur les demi-axes.*

Nota. — On déduit de ce théorème la démonstration d'une construction connue des centres de courbure aux sommets d'une ellipse. (Pigeon, N. A., 688.)

(*Mirza-Nizam*, **64**, 329.)

73. En deux points d'une ellipse on mène les normales; la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde passe par les milieux des segments interceptés entre les normales par chacun des axes. (LAGUERRE, N. A., 955.)

(*Bellavitis*, *Cohen*, **69**, 523; **70**, 34, 142) (¹).

74. Par un point M d'une ellipse, on peut mener trois normales à la courbe, indépendamment de celle qui a son pied en M. Sur chacune de ces normales, on porte, à partir du point M, une longueur égale au segment intercepté entre le grand axe et l'ellipse; les trois points ainsi obtenus sont situés sur un cercle qui touche l'ellipse au point M. (LAGUERRE, N. A., 964.)

(*Pein*, **71**, 458.)

75. a et b étant les demi-axes d'une ellipse, soient décrits deux cercles concentriques à cette courbe, ayant respectivement pour rayons $a + b$ et $a - b$. Si d'un point quelconque de l'un d'eux on mène deux tangentes à l'ellipse, les normales à cette courbe aux deux points de contact se rencontreront sur l'autre cercle. (J. BRUNO, N. A., 1101.)

(*Poujade*, **74**, 247, 249.)

76. On donne une ellipse; les normales à cette ellipse aux points P, Q se rencontrent en R de telle sorte que les droites OR et PQ sont également inclinées sur les axes. O étant le centre de l'ellipse, on demande de démontrer :

1° Que la partie de PQ, comprise entre les axes, est de longueur constante;

2° Que les deux autres normales menées de R à l'ellipse forment entre elles un angle droit. (WOLSTENHOLME, N. A., 1515.)

(*Barisien*, **85**, 476.)

77. On mène la normale en un point P d'une ellipse donnée; cette normale coupe les axes aux points Q, R; sur QR comme diamètre on décrit un cercle; par un point quelconque S de la

(¹) *Voir* N. C., question 293, solution : 78, 59.

tangente à l'ellipse au point P, on mène des tangentes à ce cercle : démontrer que la corde de l'ellipse qui passe par les points de contact sous-tend un angle droit au point P.

(WOLSTENHOLME, N. A., **1516**.)

(*Drouot*, **85**, 480.)

78. On considère les pieds des quatre normales menées d'un même point à une ellipse : démontrer que le rapport de la moyenne géométrique des abscisses de ces quatre pieds, à leur moyenne arithmétique [1], est constant et égal au demi-grand axe de l'ellipse.

Le même rapport relatif aux ordonnées est égal au demi-petit axe. (BARISIEN, N. A., **1537**.)

(*Bassani*, **85**, 530.)

79. D'un point M du plan d'une ellipse, on abaisse les quatre normales dont les pieds sont A_1, A_2, A_3, A_4. Chaque normale, telle que A_1M, rencontre le grand axe en P_1 et le petit axe en Q_1. Démontrer les relations

$$\frac{MA_1}{A_1P_1} + \frac{MA_2}{A_2P_2} + \frac{MA_3}{A_3P_3} + \frac{MA_4}{A_4P_4} = \text{const.},$$

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1} + \frac{MA_2}{A_2Q_2} + \frac{MA_3}{A_3Q_3} + \frac{MA_4}{A_4Q_4} = \text{const.}$$

(BARISIEN, N. A., **1592**.)

(*Van den Bosch*, **90**, 198, 374.)

80. Les normales à une ellipse, aux sommets d'un triangle inscrit ayant le centre de l'ellipse pour centre de gravité, se rencontrent en un même point; et le lieu du point de rencontre des normales est une ellipse concentrique à la proposée.

(BROCARD, N. C., **236**.)

(*Ed. Lucas*, **77**, 210; **78**, 45; **79**, 367) [2].

---

[1] Il faut entendre ici par moyenne géométrique la racine carrée du produit des quatre quantités, et par moyenne arithmétique leur demi-somme.

[2] *Voir* N. A., question 1173.

81. Soient O le centre d'une ellipse, PM et PM′ deux tangentes, MN et M′N′ les normales correspondantes terminées au grand axe. Démontrer : 1° que les triangles OMP, OM′P′ sont équivalents; 2° que les triangles NMP, N′M′P sont semblables.

(DOSTOR, M., 227.)

(*Liénard,* **84**, 93.)

82. Démontrer que les anomalies excentriques d'une corde normale à une ellipse vérifient l'égalité

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \frac{b^2}{a^2}. \quad \text{(ANTHONY, M., 478.)}$$

(*Brocard*, **86**, 68.)

83. Soient A un point quelconque pris dans le plan d'une ellipse E; B, C les points de contact des tangentes issues de A. 1° Démontrer que l'orthocentre du triangle ABC et le point A sont conjugués harmoniques par rapport au cercle de Monge (cercle circonscrit au rectangle des axes). 2° Examiner le cas particulier où le point A est situé sur E, et démontrer le théorème suivant :

La normale en un point A *d'une ellipse* E *rencontrant le cercle de Monge aux points* P *et* Q, *le centre de courbure correspondant est le symétrique, par rapport à* A, *du conjugué harmonique de ce point, relativement au segment* PQ.

(DE LONGCHAMPS, M., 652.)

(*Jamet,* **90**, 207.)

84. On considère une ellipse rapportée à ses axes, et deux points A, B sur cette courbe. La tangente en A rencontre l'axe Ox en un point α, et la normale en A rencontre le même axe Ox en un point α'; soient de même β, β' les points analogues relatifs au point B et à l'axe Oy. Démontrer : 1° que la droite $\alpha'\beta'$ passe par le point de rencontre de la parallèle à Oy menée par le point A et de la parallèle à Ox menée par le point B; 2° que la droite $\alpha'\beta'$ est perpendiculaire sur la droite $\alpha\beta$.

(DE LONGCHAMPS, J. M., 394.)

(*Boulogne,* J. S., **82**, 46.)

85. Soit $A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère normal inscrit à une ellipse Γ, c'est-à-dire un quadrilatère tel que les normales en ces points soient concourantes. Les tangentes à Γ en ces mêmes points rencontrent la tangente à l'une des extrémités A du grand axe AA′ en quatre points B_1, B_2, B_3, B_4; démontrer que l'on a

$$AB_1 . AB_2 . AB_3 . AB_4 = -b^4$$

$$\Sigma AB_1 . AB_2 = 0.$$ (De Longchamps, J. S., **212**.)

(*Lhébrard,* **90**, 189.)

86. Soit A un point pris sur une ellipse Γ, de centre O. D'un point M, choisi sur la normale en A, on peut mener, à Γ, trois autres normales, dont les pieds appartiennent à un certain cercle Δ, dit *cercle de Joachimsthal,* de centre Ω. Soient N le point de rencontre de AM avec le grand axe de Γ, et P la projection de M sur ce même axe. Démontrer que l'abscisse de Ω est égale à la moitié de NP.

Déduire de cette remarque, et d'autres propriétés connues, la construction du cercle de Joachimsthal qui correspond aux points M et A. (De Longchamps, J. S., **239**.)

(*Rezeau,* **90**, 276.)

87. Une ellipse étant rapportée à ses axes, démontrer que les coordonnées d'un point quelconque de la normale à l'ellipse, en un point dont les coordonnées sont $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ peuvent être représentées par les formules

$$x = \frac{c^2\cos\varphi}{a}\,\frac{\sin\lambda\,\sin\dfrac{\lambda+\varphi}{2}}{\dfrac{\lambda-\varphi}{2}},$$

$$y = -\frac{c^2\sin\varphi}{b}\,\frac{\cos\lambda\,\cos\dfrac{\lambda+\varphi}{2}}{\cos\dfrac{\lambda-\varphi}{2}},$$

λ désignant un paramètre variable. (L. Lévy, J. S., **256**.)

(*Beyens*, **91**, 167.)

88. On considère une ellipse (E) et une droite (D) perpendiculaire à l'une des diagonales du rectangle des axes. D'un point M de la droite (D), on abaisse des normales à l'ellipse. Montrer que le quadrilatère des pieds des normales est un trapèze dont les bases sont parallèles à une diagonale du rectangle des axes.

Lorsque le point M se déplace sur la droite (D), les côtés non parallèles et les diagonales du trapèze enveloppent une hyperbole équilatère, et le lieu des pôles de ces droites par rapport à l'ellipse est aussi une hyperbole équilatère.

(Barisien, J. S., 335.)

Foyers et directrices.

89. Par un foyer d'une ellipse, on mène une corde AB; par le point de rencontre des deux normales en A et B, on mène une parallèle au grand axe; cette parallèle passe par le milieu de AB. (N. A., 502.)

(*Larrose*, **60**, 85, 88, 93) (1).

90. Soient T, T′ les points de contact des deux tangentes menées à une ellipse d'un point quelconque O, et soient F, F′ les foyers de la courbe. Désignons par d, d' les deux demi-diamètres parallèles à OT, OT′, et posons

$$\mathrm{OT} = t, \qquad \mathrm{OT}' = t',$$
$$\mathrm{FO} = \rho, \qquad \mathrm{F'O} = \rho'.$$

Alors on aura

$$tt' + dd' = \rho\rho'.$$ (Strebor, N. A., 588.)

(*Kessler*, **61**, 291.)

91. On donne une ellipse et ses deux foyers F et G; deux droites touchent cette ellipse aux points M et N, et se coupent en T : démontrer la relation

$$\frac{\overline{\mathrm{TF}}^2}{\mathrm{MF.NF}} = \frac{\overline{\mathrm{TG}}^2}{\mathrm{MG.NG}}.$$ (Laguerre, N. A., 905.)

(*Valabrègue*, **69**, 237.)

---

(1) *Voir* N. A., question 433.

92. Soient A et B deux points d'une ellipse dont F et G sont les foyers; les droites FA et GB se coupent au point D et les droites FB et GA au point E.

Désignons respectivement par φ, γ, η et δ les angles

$$AFB, \quad AGB, \quad AEB, \quad ADB.$$

Démontrer les relations suivantes :

$$FA.FB \sin^2\frac{\varphi}{2} = GA.GB \sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$FA.GB \cos^2\frac{\delta}{2} = GA.FB \cos^2\frac{\eta}{2}.$$ (LAGUERRE, N. A., 982.)

(*Moret-Blanc*, **71**, 518.)

93. Étant donnée une ellipse, soient a et b deux points quelconques réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique; on prend le point β symétrique du point b par rapport à la polaire de a : démontrer que les points b et β ainsi que les deux foyers de l'ellipse sont situés sur un même cercle que ces points divisent harmoniquement. (LAGUERRE, N. A., 1233.)

(*Moret-Blanc*, **78**, 325.)

94. Les droites rectangulaires OX, OY sont les directions des axes d'une ellipse; M un point de la courbe; N le point où la normale en M rencontre l'axe OX; MQ la perpendiculaire abaissée du point M sur OY; MNP un triangle dont les côtés MP, NP sont respectivement égaux à MQ, NO.

Si l'on prend sur la bissectrice de l'angle MPN, et de chaque côté du point P, des distances PD, PD' égales entre elles et telles que $\overline{PD}^2 = MP > PN$, la circonférence passant par les points D, D' et ayant son centre sur OY coupera l'axe OX aux deux foyers de l'ellipse. (BOILLEAU, N. A., 1358.)

(*Du Montel*, **81**, 379.)

95. Le produit des distances des foyers d'une ellipse à une



normale à cette courbe est égal au carré du demi-diamètre perpendiculaire à cette normale moins le carré du demi petit axe.
(D'OCAGNE, N. A., 1535.)

(*Juhel-Rénoy*, **85**, 528.)

96. Dans l'ellipse, le demi-diamètre OA', perpendiculaire à la normale en M, est moyen proportionnel entre les rayons vecteurs FM, F'M. (CATALAN, N. C., 125.)

(*Catalan*, **79**, 282.)

97. Soit F l'un des foyers d'une ellipse inscrite à un parallélo gramme ABCD. 1° Les circonférences circonscrites aux triangles FAB, FBC, FCD, FDA sont égales; 2° leurs centres se trouvent sur une circonférence égale à chacune des quatre premières, et dont le centre est F. (STEINER, MEUTZNER, N. C., 329.)

(*Jamet*, **78**, 123.)

98. Soit MN la normale à une ellipse, en un point M de cette courbe. Soit N le point où la normale coupe le petit axe, prolongé s'il est nécessaire. Si l'on joint ce point N à l'un des foyers F, on a MN : NF $= a : c$. (CATALAN, M., 216.)

(*Servais*, **83**, 117.)

99. Soient O le centre, et F, F' les foyers d'une ellipse. On prolonge un rayon quelconque OM de MM' = OM, et l'on mène les tangentes M'P, M'Q; P, Q étant les points de contact, démontrer la relation

$$4\,M'P.M'Q = 3\,M'F.M'F'. \quad \text{(GOB, M., 695.)}$$

(*Laisant*, **91**, 45.)

100. On considère une ellipse rapportée à ses axes et le cercle Δ qui, passant par les foyers, est concentrique à cette ellipse. Par un point M, pris sur le cercle, on mène à l'ellipse deux tangentes qui coupent le cercle aux points A et B, différents de M. Démontrer que la droite AB est parallèle au grand axe de l'ellipse. (DE LONGCHAMPS, J. S., 8.)

(*Cartier*, **82**, 141.)

101. Étant donnée une ellipse, on décrit de l'un des foyers comme centre, de F par exemple, une circonférence de rayon égal à l'ordonnée de ce point. Au point F correspond une directrice; on prend la droite DD′ symétrique de la directrice par rapport à F, et l'on mène du point F le rayon vecteur FIMM′ rencontrant le cercle, l'ellipse et la droite DD′ respectivement en I, M et M′. Prouver que $IM.IM' = p^2$, p étant l'ordonnée du foyer. (Antomari, J. S., 77.)

(*Vèzes*, **85**, 279.)

102. Soit BB′ le petit axe d'une ellipse Γ; du point B, abstraction faite de BB′, on peut mener à Γ deux normales.

Soit C le pied d'une de ces normales. En désignant par F l'un des foyers de Γ, la perpendiculaire élevée en F à BF rencontre la tangente, en B, en un certain point D.

Démontrer que BD = BC. (De Longchamps, J. S., 280.)

(*Leinekugel*, **91**, 284) (1).

103. Un cercle enveloppe une ellipse et la touche en deux points réels; un trapèze inscrit dans ce cercle a ses côtés parallèles sur les tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe. Démontrer que chacun des côtés non parallèles du trapèze passe par l'un des foyers, et que chaque diagonale est parallèle à l'une des droites qui joignent les foyers aux extrémités du petit axe.

Lorsque les points de contact de l'ellipse avec le cercle sont imaginaires, ce sont les diagonales du trapèze qui passent par les foyers, et ce sont les côtés non parallèles qui ont les directions indiquées. (Tissot, J. S., 331.)

Diamètres conjugués. — Cordes supplémentaires.

104. Si, d'un point A d'une ellipse, on abaisse des perpendiculaires AM, AN, sur les diamètres conjugués égaux, la diago-

(1) Généralisation.

nale AP du parallélogramme construit sur AM et AN, comme côtés, est normale à l'ellipse en A. (STEINER, N. A., **3.**)

(*Huet*, **42**, 142, 429.)

105. O étant le centre d'une ellipse, OA, OB deux demi-diamètres conjugués donnés de grandeur et de direction, construisez le parallélogramme OACB.

Si, du centre O, vous menez à volonté OA′ qui rencontre AC en A′; par le point A′, une parallèle à la diagonale CO qui rencontre OA en C′, puis, par ce dernier point, une parallèle à la seconde diagonale AB, le point B′ où elle rencontre CB est sur la direction du diamètre conjugué à OA′.

(BRETON DE CHAMP, N. A., **131.**)

(*Soulé*, **46**, 632.)

106. On nomme *points conjugués* d'une ellipse les extrémités de deux diamètres conjugués :

1° La somme des carrés des normales par rapport au même axe de deux points conjugués est constante;

2° La somme des carrés des quatre rayons vecteurs est constante;

3° L'on a $(a-r)^2+(a-r')^2=c^2$; r, r', rayons vecteurs conjugués issus d'un même foyer; $a=\frac{1}{2}$ grand axe; $c=$ excentricité. (RITT, N. A., **133.**)

(*Dormoy*, **46**, 633.)

107. Prenons un point K dans une ellipse dont AB est un diamètre. Joignons les extrémités A, B de ce diamètre au point K, et prolongeons les droites AK, BK jusqu'aux points m', m'', où elles vont couper la courbe; menons aux points m', m'' des tangentes à l'ellipse, qui se couperont en un point extérieur T. Cela posé, la droite KT sera parallèle au diamètre conjugué du diamètre AB. (BRASSINNE, N. A., **152.**)

(*Ritt*, **47**, 389.)

108. Par le foyer d'une ellipse on mène deux cordes rectan-

gulaires, dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre; les deux cordes sont égales à deux diamètres conjugués dans l'ellipse; si par le centre on mène dans le cercle un diamètre parallèle à l'une des cordes, il est partagé par l'autre corde en deux segments égaux aux rayons vecteurs qui vont du foyer aux extrémités d'un des diamètres conjugués dans l'ellipse.

(STEINER, N. A., **178**.)

(*Jaufroid*, **48**, 144, **49**, 379.)

109. Si dans une ellipse deux cordes supplémentaires variables passent par les extrémités d'un diamètre donné, et que par un point fixe pris sur l'ellipse on mène des parallèles à ces cordes, la diagonale libre du parallélogramme qu'elles forment avec elles passe par un point fixe.

La connaissance de ce point, d'ailleurs facile à déterminer, permet de construire à la fois les points, et la tangente en ces points, d'une ellipse donnée par son centre et par trois points.

(PIGEON, N. A., **686**.)

(**64**, 328.)

110. Étant donné un point P sur une ellipse de centre O, on mène en ce point une tangente et la normale qui touche au point Q la développée de l'ellipse, et l'on fait passer un cercle par les extrémités r, r' du diamètre conjugué à OP et par la projection S du centre O sur la tangente en P, puis l'on prolonge OS jusqu'à sa rencontre en S′ avec le cercle; démontrer que $OS' = PQ$. (CHAMBON, N. A., **1463**.)

(*Chambon*, **83**, 477, 515.)

111. Soient CA, CB deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse; et P, Q deux points de CA, CB prolongés, tels que $AP.BQ = 2CA.CB$. Démontrer que BP et AQ se coupent sur l'ellipse. (GENESE, N. A., **1506**.)

(*Juhel-Rénoy*, **85**, 381.)

***112.** On donne les deux demi-diamètres conjugués OA, OB

d'une ellipse. Du point B on abaisse une perpendiculaire sur OA et l'on porte sur cette droite les segments BC et BD égaux à OA. La circonférence COD rencontre aux points P, Q la parallèle menée du point B à OA.

On sait que OP, OQ donnent les directions des axes de l'ellipse; on demande de démontrer que les projections de OP et de OQ sur OC (ou sur OD) sont égales aux demi-axes de l'ellipse. (MANNHEIM, N. A., 1525.)

113. Soient CA, CB deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse et F l'un des foyers; on construit le parallélogramme FAVB. Démontrer : 1° que la droite CV est dirigée suivant la bissectrice de l'angle AVB; 2° que $CV^2 = 2VA.VB$; 3° que le lieu du point V est une ellipse quand on fait varier le système des diamètres conjugués. Étendre ces propriétés à l'hyperbole.

(LAISANT, M., 723.)

(*Genese*, **91**, 278.)

114. Une tangente à une ellipse rencontre le cercle principal aux points M, M'; démontrer que les diamètres conjugués avec ceux qui passent par M et M' rencontrent la tangente sur les directrices. (GREENSTREET, M., 742.)

115. Soient λ, λ' les angles sous lesquels on voit d'un même point d'une ellipse deux diamètres conjugués quelconques. Démontrer que la somme $\cot^2\lambda + \cot^2\lambda'$ est constante.

(M., 747.)

116. Par l'un des foyers d'une ellipse on mène deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués et coupant la courbe en A, A', d'une part, en B, B' d'autre part; démontrer que la somme AA' + BB' est constante et trouver sa valeur.

(J. M., 311.)

(*Boulogne*, **81**, 476.)

117. Soit BC un diamètre d'une ellipse E; on considère l'extrémité A d'un demi-diamètre conjugué de BC, puis on prend sur E

(explicitement sur l'arc AC, pour éviter toute ambiguïté sur les signes) un point M; démontrer que l'on a constamment

$$\frac{1}{\text{MAC}} - \frac{1}{\text{MAB}} = \frac{2}{\text{MBC}}.$$ (De Longchamps, J. S., 170.)

(*Lemoine*, **87**, 238.)

118. Sur un diamètre D d'une ellipse donnée on décrit une circonférence de cercle, et l'on mène une tangente commune à ces deux courbes. Démontrer que la partie de cette tangente, comprise entre les points de contact, est égale à la projection, sur D, du demi-diamètre qui lui est conjugué.

(Mannheim, J. S., **295**.)

(*Sollertinsky*, **92**, 42.)

Courbure. — Cercles osculateurs.

119. Soient A et A' deux points d'une ellipse; AN, A'N deux normales se rencontrant en N, n et n' les grandeurs de ces normales, p et p' les distances du centre aux tangentes passant par A et A', d le demi-diamètre parallèle à la corde AA'; on a : 1° $np + n'p' = 2d^2$; 2° si l'on mène les deux autres normales passant par N, on a $np + n'p' + n''p'' + n'''p''' =$ constante; 3° si A' se réunit à A, on a $np = d^2$, où n est le rayon de courbure; 4° cette dernière expression s'applique au rayon de courbure d'une ligne de courbure de l'ellipsoïde, d étant le demi-diamètre parallèle à la tangente. (Joachimsthal, N. A., **161**.)

(*Mention*, *Lebesgue*, **48**, 114, 206, 225.)

120. Si a et b sont les deux axes d'une ellipse; R, R_1 les rayons de deux cercles osculateurs; d la distance de leurs centres; p la distance du centre de l'ellipse à l'axe radical des deux cercles, on a la relation

$$2dp = 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right).$$ (Painvin, N. A., **834**.)

(*Pellet*, **68**, 40.)

121. Soient M et M_1 deux points d'une ellipse, tels que le

produit des coefficients angulaires des diamètres passant par ces points soit $-\frac{b^3}{a^3}$. En appelant ρ, ρ_1 les rayons de courbure en ces points, r, r_1 les rayons de courbure de la développée aux points correspondant à ceux de l'ellipse, on a les deux relations

$$\rho\rho_1 = ab, \qquad \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^4 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^3.$$ (SARTIAUX, N. A., 856.)

(*Giard*, **68**, 449.)

122. En un point d'une ellipse, on prend sur la normale en dehors de la courbe une longueur égale au rayon de courbure en ce point : le cercle décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le cercle lieu des angles droits circonscrits à l'ellipse. (STEINER, N. A., 1002.)

(*Lez*, **71**, 460, 462.)

123. Le produit des rayons de courbure d'une ellipse aux sommets d'un triangle inscrit, dont le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipse, est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle. (FOURET, N. A., 1087.)

(*Mathieu*, **72**, 429.)

124. Le rayon de courbure en un point de l'ellipse, qui est égal au demi-diamètre conjugué de ce point, a son extrémité sur ce diamètre. Il est tangent au cercle concentrique à l'ellipse ayant la différence de ses axes pour rayon.

(DE POLIGNAC, N. A., 1113.)

(*Moret-Blanc*, **73**, 280.)

125. Si d'un point quelconque du plan d'une ellipse quelconque, on abaisse les quatre normales à l'ellipse ; si N_1, N_2, N_3, N_4 sont les distances du point aux pieds des normales, et ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 les rayons de courbure correspondant aux pieds des normales, on a la relation

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 - N_1} + \frac{\rho_2}{\rho_2 - N_2} + \frac{\rho_3}{\rho_3 - N_3} + \frac{\rho_4}{\rho_4 - N_4} = 2.$$

(BARISIEN, N. A., 1588.)

126. Les circonférences ayant pour diamètres les segments déterminés, sur les axes, par la normale et par la tangente, en M, à une ellipse, se coupent en un second point M′. Le rayon de courbure en M est vu, du point M′, sous un angle droit [1].
(MENNESSON, N. C., **411**.)

127. Si les cercles osculateurs d'une ellipse en trois points L, M, N passent par un même quatrième point P de cette courbe, le centre de gravité du triangle LMN est situé sur le petit axe de l'ellipse. (ZAHRADNIK, N. C., **412**.)

(*De Longchamps*, **78**, 390.)

128. Si le centre de courbure *m*, correspondant à un point M d'une ellipse, est sur le diamètre conjugué à M, le cercle de courbure est équivalent à l'ellipse. . (N. C., **422**.)

(*Catalan*, **78**, 398, **79**, 377.)

129. Par un point P, pris sur l'ellipse, on peut mener trois cercles osculateurs à la courbe, indépendamment de celui qui a son point de contact en P;

1° Ces trois cercles sont toujours réels;

2° Leurs points de contact et le point P appartiennent à une même circonférence;

3° La puissance du centre de l'ellipse, par rapport à ce cercle, égale $\frac{a^2+b^2}{2}$. (DE LONGCHAMPS, N. C., **424**.)

(*Neuberg*, **78**, 399.)

130. On donne une ellipse dont les axes sont OA et OB; la tangente en un point M de la courbe rencontre les axes en C

---

[1] Soient TT′, NN′ les segments dont il s'agit; et soit C le centre de courbure. Le théorème de M. Mennesson peut être énoncé ainsi :

Les circonférences décrites sur les droites TT′, NN′, MC, prises comme diamètres, se coupent en un point M′ symétrique du centre O, relativement à la droite qui joint les milieux de TT′, NN′.

(*Note de M. Catalan.*)

et D; on construit le rectangle OCPD, et l'on joint le sommet P au point M. Démontrer que si du centre on abaisse une perpendiculaire sur PM, cette perpendiculaire rencontre la normale en M en un point I qui est le centre du cercle osculateur de l'ellipse au point M. (De Longchamps, J. M., 256.)

(*Baron*, **81**, 129.)

131. A partir du point a où la normale en m à une ellipse rencontre l'un des axes, nous menons une perpendiculaire à cette normale; cette droite rencontre le diamètre qui passe en m en un point d; nous abaissons de ce point d une perpendiculaire sur l'axe dont nous avons considéré le point de rencontre avec la normale; cette perpendiculaire rencontre la normale au centre du cercle osculateur à la courbe en m. (Mannheim, J. M., 257.)

(*Baron*, **81**, 281.)

Autres propriétés.

***132.** Soient A et B les extrémités du grand axe $2a$ d'une ellipse, C le centre; O un point fixe dans le plan de l'ellipse, et $OC = d$; inscrivons dans l'ellipse un polygone de $2n$ côtés, projection d'un polygone régulier inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection orthogonale; A et B étant deux sommets opposés, menons du point O des rayons successifs $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{2n}$, et par le centre des demi-diamètres $R_1, R_2, \ldots, R_{2n}$ respectivement parallèles à ces rayons; on a les deux relations

$$\frac{r_1}{R_1}\frac{r_3}{R_3}\frac{r_5}{R_5}\cdots\frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}} = \pm\left(1+\frac{d}{a}\right)^n,$$
$$\frac{r_2}{R_2}\frac{r_4}{R_4}\frac{r_6}{R_6}\cdots\frac{r_{2n}}{R_{2n}} = \pm\left(1-\frac{d}{a}\right)^n.$$

le signe supérieur devant être pris lorsque le point O est intérieur et le signe inférieur lorsque le point est extérieur.

(N. A., 448.)

133. On donne un triangle conjugué à une ellipse (chaque sommet est le pôle du côté opposé); la tangente menée du centre

de l'ellipse au cercle circonscrit au triangle est égale à la corde du quadrant d'ellipse. (FAURE, N. A., **524**.)

(*Painvin, de Jonquières*, **60**, 290, **61**, 25.)

134. Une ellipse et l'un de ses cercles directeurs étant tracés, il existe une infinité de triangles simultanément inscrits au cercle et circonscrits à l'ellipse; le point de rencontre des hauteurs est le même pour tous ces triangles. (PAUL SERRET, N. A., **738**.)

(*Picquet*, **66**, 153, 170, 172.)

135. Étant donnés deux points fixes A et B situés sur une ellipse, si l'on joint un point quelconque M de cette courbe aux deux points fixes, les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes MA et MB interceptent sur chacun des axes un segment dont la longueur est constante, quelle que soit la position du point sur la courbe. (LAGUERRE, N. A., **965**.)

(*Chadu*, **70**, 142.)

***136.** Les droites menées d'un point variable d'une ellipse à deux points fixes, pris entre les deux foyers, peuvent être prises aussi pour les côtés d'un triangle variable construit sur une base fixe et dont le sommet décrit une ligne droite. En d'autres termes, si l'on prend l'équation en coordonnées bipolaires d'une droite, et que, conservant la même équation, on prenne deux nouveaux pôles, cette équation représentera une ellipse.

(JACOBI, N. C., **242**.)

137. On considère sur une ellipse E un diamètre A'A'' et deux points quelconques A, B. Les droites AA' et BA'' se coupent en un point P; AA'' et BA' en un point Q; le pôle de AB est évidemment situé, ainsi que le prouve le théorème de Pascal, sur PQ; mais on propose de démontrer qu'il est placé au milieu de PQ. (DE LONGCHAMPS, J. S., **25**.)

(*Griffon*, **83**, 44.)



UNE ELLIPSE. — PROBLÈMES.

Polygones inscrits ou circonscrits. — Courbure; cercles osculateurs.

138. Inscrire dans une ellipse donnée une corde telle que la somme de sa longueur et de la distance de son milieu au centre de l'ellipse soit un *maximum*. Application au cercle. (N. A., 9.)

(**42**, 146.)

139. Inscrire dans une ellipse un triangle semblable à un triangle donné; cas particulier où le triangle donné est équilatéral. (N. A., **11**.)

(*Gerono*, **42**, 148.)

140. Inscrire dans un triangle donné une ellipse dont la surface soit égale à celle d'un cercle donné.

En discutant cette question, on déterminera, comme cas particulier, l'ellipse inscrite dont la surface est un maximum.

(N. A., **86**.)

(**45**, 488.)

141. Dans une ellipse donnée inscrire un triangle *équilatéral* dont le côté soit 1° un maximum, 2° un minimum. (N. A., **540**).

(*Hemming*, **64**, 131.)

142. Même question pour le triangle *équilatéral* circonscrit.

(N. A., **541**; M., **494**.)

(*Brocard*, M., **90**, 144.)

143. Étant donnés dans un plan un parallélogramme et une droite, on demande de construire avec la règle et le compas les points où la droite rencontre une ellipse inscrite au parallélogramme et touchant ses quatre côtés en leurs milieux.

(J. M., **253**.)

(*Dupuy*, **81**, 425.)

144. Circonscrire à une ellipse un quadrilatère ou un triangle inscrits à un cercle concentrique. Faire voir que le problème est impossible ou indéterminé, et chercher la valeur du rayon pour laquelle il est indéterminé.

Mêmes problèmes quand le centre du cercle est confondu avec l'un des foyers. (AMIGUES, J. S., **196**.)

(*Leinekugel*, **90**, 232.)

145. Trouver le maximum de l'angle sous lequel une ellipse donnée est coupée par le cercle de courbure.

(WITWORTH, N. A., **1019**.)

(*Desmons*, **72**, 233.)

146. Le triangle qui a pour sommet le centre de l'ellipse et pour base la corde du cercle osculateur en un point de l'ellipse est équivalent au triangle qui a pour sommet le centre de l'ellipse et pour base la corde de l'ellipse perpendiculaire au grand axe, menée au point dont le paramètre angulaire est double de celui du point de contact. Maximum de l'aire de ce triangle. Maximum de la longueur de la corde commune.

(DESMONS, N. A., **1090**.)

(*Pellissier*, **73**, 38.)

147. Déterminer les maximums et les minimums de la corde commune à une ellipse et à son cercle de courbure.

(GRUNERT, N. C., **269**.).

(*Fleureau*, **77**, 392.)

148. Une corde PQ d'une ellipse est normale en P; trouver le minimum de cette corde et démontrer que, si PQ est minimum, le centre du cercle osculateur en P est le point Q; O étant le pôle de la corde PQ, montrer que, si OP est minimum, le pôle sera situé sur la seconde tangente commune à l'ellipse et au cercle osculateur en P. (J. S., **4**.)

(*Kœhler*, **83**, 187.)

149. On donne une ellipse de centre O, dont les demi-axes

sont a et b. On prend sur cette courbe un point m tel que la normale en ce point, à l'ellipse, fasse avec le grand axe un angle ω. On demande de déterminer en fonctions de a, b, ω :

La distance de O à la tangente en m à l'ellipse,

La distance de O à la normale en m,

La longueur Om et celle du demi-diamètre conjugué de Om,

L'angle de Om avec le grand axe,

La distance de m aux deux foyers de l'ellipse,

La longueur de la portion de la normale en m comprise entre ce point et le grand axe,

Le rayon de courbure de l'ellipse, pour le point m.

(J. S., **277**.)

(*Brocard*, **91**, 261.)

Autres Problèmes.

150. Par un point (a, b) du plan d'une ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

on peut, en général, mener quatre droites qui coupent cette courbe sous un angle donné, δ, différent de zéro; trouver l'équation du système de ces quatre droites. (N. A., **646**.)

(*Noblot*, **63**, 151.)

151. On donne sur un plan une ellipse de centre O et un point fixe. De ce point on mène une transversale qui rencontre l'ellipse au point p. Le diamètre conjugué de Op coupe la transversale au point m.

Pour quelles directions de la transversale le segment pm est-il maximum ou minimum? (Mannheim, N. A., **1385**.)

152. Soient DM, DM′ deux droites rectangulaires, tangentes à une ellipse, aux points M, M′. Chercher le maximum et le minimum des longueurs DM, DM′, et déterminer les normales communes à l'ellipse et à sa développée.

(Brocard, N. C., **282**; M., **435**.)

(*Mantel*, M., **88**, 275.)

*153. Trouver la relation qui existe entre la longueur d'une corde de l'ellipse, les rayons vecteurs des deux extrémités et les distances des deux foyers à cette corde. — En déduire que le produit des distances des deux foyers à une tangente à l'ellipse est constant. (Ed. Lucas, N. C., 414.)

154. Aux foyers d'une ellipse, on place deux sources lumineuses d'intensités I et I'. Trouver : 1° le point de la courbe qui est également éclairé par les deux sources; 2° le point qui est le plus éclairé et celui qui est le moins éclairé. (Barbarin, M., 145.)

(*Bastin*, **83**, 184.)

155. Étant donnée une ellipse, on demande d'évaluer la moyenne des rayons vecteurs issus d'un foyer et également espacés : 1° quant aux angles; 2° quant aux anomalies excentriques; 3° quant aux aires. (E. Dubois, M., 180.)

(*Cesaro*, **84**, 40.)

156. Mener dans une ellipse une normale d'une longueur donnée, cette normale étant comptée jusqu'à l'axe focal.

(Thiry, M., 337.)

(*Lemoine*, **85**, 16.)

157. Soient MN une corde, normale à une ellipse à l'une de ses extrémités, et P le pôle de MN. Trouver le maximum de l'angle MPN. (M., 568.)

(*Mandart*, **87**, 260.)

158. Soient A, B, C trois points pris sur ellipse de foyer F, et distants de ce point respectivement de α, β, γ. Il existe sur la courbe un quatrième point D, tel que l'on ait

$$d(a\alpha^2 - b\beta^2 + c\gamma^2) - (a\alpha - b\beta + c\gamma)^2 = a,$$

a désignant la surface du triangle BCD, b celle du triangle CDA, etc. Trouver ce point. (Antomari, J. S., 82.)

159. On donne une ellipse E, et l'on considère la droite Δ, qui a pour équation

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Soit M un point pris sur l'ellipse, et soit Δ' la tangente en ce point; Δ' rencontre Δ en un point P. On joint ce point P au sommet de droite A, et l'on élève à AP une perpendiculaire Δ'' par le point A.

Démontrer que la droite AM est bissectrice de l'angle formé par Δ'' avec le grand axe AA'. Déduire de cette remarque une construction de la tangente en un point de l'ellipse au moyen de la règle et de l'équerre. On suppose que les sommets de la courbe sont seuls connus. (De Longchamps, J. S., **102.**)

(*Marchis*, **85**, 188, **88**, 212.)

UNE HYPERBOLE.

Hyperbole équilatère.

160. Dans l'hyperbole équilatère, si l'on multiplie la distance d'un point de la directrice au centre par la tangente de l'angle sous lequel on voit de ce point l'hyperbole, on obtient pour produit l'axe transverse. (Faure, N. A., **670.**)

(*Contet*, **64**, 264.)

161. Si, d'un point d'une hyperbole équilatère dont le centre est O, on abaisse une perpendiculaire BC sur une tangente en A, l'angle COA est double de CAB. (Cambier, N. A., **1282.**)

(*Lacazette*, **79**, 324.)

162. D'un point pris sur une hyperbole équilatère, on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe. Démontrer que

les côtés d'un triangle quelconque inscrit dans l'hyperbole déterminent sur cette droite des segments proportionnels.

(Mannheim, N. A., **1384**.)

163. Soient A, B, C et D quatre points pris arbitrairement sur un cercle ayant pour centre le point O. Considérons l'hyperbole équilatère passant par ces quatre points et de son centre ω abaissons une perpendiculaire ωP sur un côté quelconque AB du quadrilatère ABCD; du centre O du cercle, abaissons une perpendiculaire OQ sur le côté opposé CD. En désignant par V l'angle que font les côtés AB et CD, démontrer la relation

$$\omega P = OQ \cos V.$$ (Laguerre, N. A., **1386**.)

(*Moret-Blanc*, **82**, 380.)

164. Les projections orthogonales d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit déterminent une circonférence qui passe par le centre de la courbe. (Terrier, N. A., **1500**.)

(*Brocard*, **85**, 524.)

165. Le triangle ABC, rectangle en A, est inscrit dans une hyperbole équilatère; les tangentes à cette courbe aux points B et C se coupent en T; la normale au point B coupe le côté AC au point B', la normale au point C coupe le côté AB au point C'. Démontrer que l'angle B'TC' est égal à l'angle BTC des tangentes. (D'Ocagne, N. A., **1504**.)

(*Goffart*, **85**, 380.)

166. PQ est un diamètre d'une hyperbole équilatère; un cercle décrit du point P comme centre avec PQ pour rayon rencontre l'hyperbole en trois autres points L, M, N; démontrer que le triangle LMN est équilatéral. (D'Ocagne, N. A., **1507**.)

(*Moret-Blanc*, **85**, 382.)

167. Désignons par B, C, D, E les points d'intersection d'une



hyperbole équilatère avec une circonférence ayant pour centre un point A de la courbe, et passant par le point B diamétralement opposé. Les points C, D, E sont les sommets d'un triangle équilatéral. (**Brocard**, N. C., **235.**)

(*Freson*, **77**, 127.)

168. Le lieu d'un point tel que les extrémités des trois droites limitées aux côtés des angles d'un triangle donné et ayant leur milieu en ce point soient situées sur une hyperbole équilatère est l'axe d'homologie de ce triangle et du triangle des pieds de ces hauteurs. (**Steiner**, M., **413**).

(*Jamet*, **86**, 18.)

169. Étant données les équations

$$y^2 - x^2 - 2xy - 2y + 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1,$$

qui représentent une hyperbole équilatère et une circonférence : 1° Les deux courbes ont une tangente commune AD en un point A. 2° Elles se coupent à angle droit en un autre point B. 3° La ligne AB est un diamètre de l'hyperbole. 4° EF étant une corde du cercle parallèle à AD, les lignes AF, EB se rencontrent sur l'hyperbole. (**Brocard**, M., **492.**)

(*Beyens*, **86**, 232.)

170. On considère une hyperbole équilatère H et le quadrilatère formé par les tangentes aux points d'incidence des normales issues d'un même point. Démontrer que les circonférences décrites sur les diagonales du quadrilatère comme diamètres passent par le centre de H et, en ce point, sont mutuellement tangentes. (**De Longchamps**, M., **711.**)

(*Liénard*, **91**, 206.)

171. On sait que le lieu du centre d'une hyperbole équilatère inscrite à un triangle est un cercle; faire voir que ce cercle est conjugué par rapport au triangle. (**Amigues**, J. S., **107.**)

(*Tissier*, **85**, 285.)

172. Si l'on joint un point M quelconque d'une hyperbole équilatère aux deux extrémités A et A′ d'un diamètre, les cordes conjuguées à ce diamètre sont des antiparallèles de AA′ dans le triangle AMA′. (LEMOINE, J. S., **135**.)

(*Michel*, **86**, 115.)

173. Les cercles tangents à l'axe non transverse d'une hyperbole équilatère, qui ont leur centre sur cette courbe, découpent sur l'axe transverse des segments égaux. (D'OCAGNE, J. S., **232**).

(*Favery*, **90**, 239.)

174. Soit A un point arbitrairement choisi sur une hyperbole équilatère, et soient B, C les extrémités d'un diamètre quelconque de cette courbe. La tangente en A à cette hyperbole équilatère est symédiane du triangle ABC (le théorème permet, connaissant le centre et deux points d'une hyperbole équilatère, de construire les tangentes en ces points).

Corollaire. — Si un cercle et une hyperbole équilatère sont concentriques, les tangentes à l'hyperbole aux extrémités d'un de leurs diamètres communs sont perpendiculaires à l'autre diamètre commun. (D'OCAGNE, J. S., **267**.)

(*Tarry*, **91**, 255.)

175. Un arc quelconque, pris sur une hyperbole équilatère, est vu, de deux points diamétralement opposés sur la courbe, sous le même angle.

En déduire le théorème suivant, facile à vérifier directement :

Soient A, A′ deux points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère H. Les circonférences passant par M tangentiellement à H et, respectivement, par les points A, A′ sont égales. (DE LONGCHAMPS, J. S., **275**.)

(**91**, 212.)

176. Soit H une hyperbole équilatère. Ayant pris deux points A, B, sur H, on trace un cercle Δ ayant AB pour diamètre. Ce

cercle Δ coupe H en deux points, C, D, différents des points A, B. Soit I le point de concours des droites AD, BC; J, celui des droites BC, AD.

Démontrer que IJ coupe les axes de H en deux points formant avec I, J une division isotomique ([1]).

(DE LONGCHAMPS, J. S., **279**.)

(*Brocard*, **91**, 237.)

Hyperbole quelconque.

177. Inscrivant une droite dans l'angle des asymptotes d'une hyperbole, de telle sorte qu'elle intercepte un triangle dans cet angle et un segment dans l'hyperbole; la droite allant en s'éloignant du centre parallèlement à elle-même. la limite de l'aire du segment divisée par l'aire du triangle est égale à l'unité.

(N. A., **204**.)

(*Murent*, **49**, 412.)

178. Trouver la condition pour qu'une asymptote d'une conique donnée par l'équation générale du second degré passe par l'origine. (SALMON, N. A., **734**.)

(*Dorbecourt*, **65**, 474.)

179. A une hyperbole on mène deux tangentes (A) et (B), la corde des contacts est (C); d'un point quelconque m de la courbe on mène ensuite une parallèle à une asymptote, et l'on désigne par a, b, c les points de rencontre de cette parallèle avec les droites (A), (B), (C).

Démontrer que mc est moyenne proportionnelle entre ma et mb.

([1]) Nous rappelons que quatre points, situés en ligne droite, forment une division isotomique, lorsque le milieu du segment formé par les points moyens de la division coïncide avec le milieu du segment formé par les points extrêmes. (*Note de M. de Longchamps.*)

Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, deux tangentes et un point. (GERONO, N. A., **867**.)

(*Willière*, **68**, 548.)

180. Si, d'un point M pris sur une branche d'hyperbole, on mène une tangente MT au cercle bitangent à la courbe selon son axe transverse, et si, du même point M, on mène une parallèle à l'asymptote jusqu'à son point d'intersection Q avec l'axe transverse de l'hyperbole, le triangle MTQ est isoscèle.

(LEVAT, N. A., **1161**.)

(*Garreta*, **75**, 238.)

181. Par un point quelconque d'une hyperbole, on mène les droites parallèles aux asymptotes; par un autre point M′, pris arbitrairement sur l'hyperbole, on mène deux cercles, tangents aux asymptotes et ayant leurs centres sur l'axe transverse de la courbe : démontrer que ces deux droites et ces deux cercles sont tangents à un même cercle. (LAGUERRE, N. A., **1395**.)

(*Chateau*, **83**, 133, 138.)

182. Par le foyer F′ d'une hyperbole, dont l'excentricité est égale à 2, et par le sommet A, le plus éloigné de F, on fait passer une circonférence qui coupe l'hyperbole en trois points M, N, P, différents de A. 1° Ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral. 2° Les droites F′M, F′N, F′P coupent l'hyperbole en trois autres points m, n, p, qui sont aussi les sommets d'un triangle équilatéral. 3° Le cercle circonscrit à mnp passe par M, N, P. (SIDLER, N. C., **280**.)

(*Dubois, E. Lucas*, **78**, 88, 282.)

183. Étant donnés un cercle et une hyperbole; par un point P de l'hyperbole on mène des parallèles aux asymptotes : 1° elles rencontrent les trois systèmes de sécantes communes en trois couples de quatre points qui sont les sommets de trois quadrilatères inscriptibles; 2° le point P est d'égale puissance par rap-

port à la circonférence donnée et aux trois circonférences circonscrites aux trois quadrilatères obtenus.

(NIEWENGLOWSKI, N. C., **491**.)

(*Jamet*, **79**, 298.)

184. En désignant par V l'angle, aigu ou obtus, des asymptotes de l'hyperbole, angle dans lequel se trouve la courbe, démontrer que

$$\operatorname{tang} V = \varepsilon \frac{\sqrt{B^2 - AC}.\sin\theta}{A + C - 2B\cos\theta},$$

ε étant égal à ±1, et son signe étant le même que celui du discriminant. (J. S., **27**.)

(**82**, 238.)

185. On considère une hyperbole H ayant pour asymptotes les droites Ox, Oy; soit M un point de cette courbe; par M on mène une droite parallèle à Ox, qui rencontre Oy en un point P. Soit Q le symétrique de P par rapport à M; par le point Q, on mène à Oy une parallèle qui rencontre H en R; enfin, par R, on trace une parallèle à Ox; soit D cette dernière droite. On propose de démontrer que toute transversale D′, menée par le point M dans le plan de l'hyperbole, rencontre QR et H en deux points également distants de D.

D′ rencontre H en un point S, et la tangente en ce point coupe Oy au point T. Démontrer que la parallèle à D′ menée par T et la droite QR se coupent sur Ox. (DE LONGCHAMPS, J. S. **39**.)

(*Kauffmann*, **83**, 283.)

186. Soit BC un diamètre fixe dans une hyperbole donnée H; par les extrémités B et C on mène des parallèles aux asymptotes, parallèles qui se coupent en A.

Démontrer que, si M est un point mobile sur H, le rapport

$$\frac{MAB.MAC}{MBC}$$

a une valeur constante. (DE LONGCHAMPS, J. S., **171**.)

(*Lemoine*, **87**, 238.)

187. On considère une hyperbole H, de centre O. Démontrer qu'on peut trouver un cercle Δ, concentrique à H, tel qu'il existe des losanges inscrits à H et circonscrits à Δ.

La circonférence Δ est réelle quand l'angle des asymptotes que contient H est obtus; son rayon s'obtient en élevant une perpendiculaire, au point O, à l'une des asymptotes de H, jusqu'à sa rencontre avec la courbe.

Démontrer que si, d'un point de H, on mène les tangentes à Δ, les rayons qui aboutissent aux points de contact forment un faisceau harmonique avec les perpendiculaires élevées en O, aux asymptotes de H. (De Longchamps, J. S., 308.)

UNE PARABOLE. — PROPRIÉTÉS.

Tangentes et normales.

188. Soit MN une tangente quelconque à une parabole, limitée en M à la tangente au sommet et en N à une perpendiculaire fixe quelconque prise sur cet axe. Démontrer que la puissance du point M, par rapport à la circonférence de diamètre NP, est constante. (Laisant, N. A., **1179.**)

(*Sondat*, **75**, 472.)

189. D'un point donné M on mène deux droites normales à une parabole; soient *a* et *b* leurs pieds, α le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur la corde *ab* et β le conjugué harmonique de α relativement aux points *a* et *b*. Démontrer que le point β est sur la droite menée par M perpendiculairement à l'axe de la parabole.

Même question pour le paraboloïde. (Laguerre, N. A., **1342.**)

(*Dufaur*, **80**, 479, 528; **81**, 178.)

190. Dans la parabole, les segments déterminés sur deux tan-

gentes issues d'un même point de l'axe, par deux tangentes quelconques sont égaux. (D'OCAGNE, N. A., **1536.**)

(*Russo*, **85**, 484.)

191. Si l'on considère les trois normales menées d'un point à une parabole et le triangle formé en menant les tangentes à leurs pieds; si l'on suppose ensuite que le point, d'où l'on mène des normales à la parabole, se déplace sur un diamètre de la courbe :

1° Tous les triangles des tangentes ont leurs sommets sur une même hyperbole équilatère;

2° Tous ces triangles ont un même point de rencontre des trois hauteurs;

3° Les cercles des neuf points de ces triangles passent par le sommet de la parabole;

4° Les centres des cercles des neuf points sont sur un même diamètre.

Enfin, comme généralisation du 2°,

5° Si l'on considère trois normales quelconques à une parabole (ne se coupant pas au même point), le point de rencontre des hauteurs du triangle des normales et le point de rencontre du triangle des tangentes sont sur un même diamètre.

(CHAULIAC, N. A., **1545.**)

(*Brocard*, **92**, 4*.)

192. Soient A, B, C les pieds des trois normales à une parabole menées par un point P de son plan. Par le sommet de la courbe on fait passer trois cercles respectivement tangents à la parabole en A, B, C. Ces cercles coupent la courbe en trois autres points A′, B′, C′. Démontrer que les normales en A′, B′, C′ à la parabole sont concourantes. (LEMAIRE, N. A., **1591.**)

(*Van den Bosch*, **90**, 159, 373.)

193. Si les normales à une parabole aux points A, B, C concourent en un même point P, et que les normales PA, PB, PC rencontrent la parabole en A′, B′, C′, les cercles décrits sur PA′, PB′ et PC′ comme diamètres sont tangents respectivement à BC,

CA, AB. En outre, si α, β, γ sont les points de contact correspondants, les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sont tangentes à la parabole en A', B', C'. (D'OCAGNE, N. A., 1617.)

194. Le polygone formé par n tangentes à une parabole est la moitié du polygone qui a pour sommets les points de contact.

(E. LUCAS, N. C., 93.)

(*Melle L. Lebœuf*, **77**, 153.)

195. Soient P, Q, R trois points d'une parabole, tels que les normales concourent en un même point.

Les tangentes en ces points rencontrent une perpendiculaire à l'axe en trois points d'où l'on mène trois nouvelles tangentes à la courbe.

Démontrer que la circonférence circonscrite au triangle formé par ces dernières tangentes passe par le sommet de la parabole.

(TUCKER, M., 714.)

(*Déprez*, **91**, 173.)

196. On considère un triangle ABC et une parabole. On mène à la parabole une tangente D, parallèle au côté BC, et du point A on mène à la parabole des tangentes qui rencontrent la droite D en A' et A''. Opérant de même pour les deux autres côtés, on obtient six points A', A'', B', B'', C', C''. Démontrer que ces six points sont sur une conique qui contient A, B et C.

(WEILL, J. S., 126.)

(*Lamotte*, **89**, 234.)

197. D'un point M on mène, à une parabole P, trois normales MA, MB, MC. Les tangentes aux points A, B, C forment un triangle $A'B'C'$. Soit ω le centre de la circonférence circonscrite à $A'B'C'$.

Démontrer que $M\omega$ passe par le foyer F de P et que l'on a

$$2\omega F = FM.$$

(DE LONGCHAMPS, J. S., 316.)

Foyer et directrice.

198. Si, dans une parabole, des rayons vecteurs sont en progression géométrique, les sinus des angles que forment les tangentes menées par les extrémités respectives des rayons vecteurs avec l'axe sont aussi en progression géométrique. (N. A., **123.**)

(*D'André,* **46**, 331.)

199. 1° Soient $2p$ le paramètre d'une parabole; r, r' les rayons vecteurs menés du foyer aux extrémités d'une corde, normale à la courbe au point correspondant à r; on a la relation

$$(r - \tfrac{1}{2}p)(r' - \tfrac{1}{2}p) = (r + \tfrac{1}{2}p)^2.$$

2° L'angle α de la normale avec l'axe est donné par

$$\cos^2\alpha = \frac{p}{2r}.$$

3° La distance d du foyer à la normale au point correspondant à r, par

$$d^2 = r(r - \tfrac{1}{2}p).$$ (Ritt, N. A., **160.**)

(*Moutier*, **47**, 363.)

200. Une parabole, dont le foyer est F, est tangente aux deux côtés d'un angle droit YOX; on élève au point O une perpendiculaire à la droite OF; cette perpendiculaire rencontre la tangente au sommet de la parabole en un point F′. On demande de faire voir : 1° que la droite FF′ est tangente en F à la courbe décrite par ce point, lorsque la parabole glisse sur son plan en restant tangente aux côtés de l'angle droit YOX; 2° que la courbe décrite par F′, pendant ce mouvement, est semblable à la courbe décrite par F; 3° que la tangente F′C à la courbe décrite par le point F′ rencontre la droite OF en un point C tel que OF = 4OC.

(Mannheim, N. A., **621.**)

(*Bartet,* **62**, 314.)

201. La différence des carrés des distances de deux points de l'axe d'une parabole, également distants du foyer, à une tangente quelconque, est constante. (BROCARD, N. A., **1165**.)

(*Lemelle*, **75**, 285.)

202. Si des différents points de la tangente au sommet d'une parabole on mène, aux rayons aboutissant au foyer, des perpendiculaires égales à ces rayons, le lieu de leurs extrémités se compose de deux tangentes à la parabole, inclinées de 45° sur l'axe.

En conclure la propriété suivante du triangle ABC rectangle en A : Soient *a*, *b*, *c* les centres des carrés respectivement construits sur l'hypoténuse et les deux côtés de l'angle droit; la ligne A*a* est perpendiculaire, au point A, à la droite *bac*, et elle lui est égale en longueur. Application aux triangles dans lesquels on fait varier l'un des sommets B sur le côté AB.

(BROCARD, N. A., **1227**.)

(*Brunot*, **77**, 332.)

203. Toute corde menée par le foyer d'une parabole est égale au quadruple du rayon vecteur du point de contact de la tangente parallèle à cette corde. (SONDAT, N. A., **1245**.)

(*Barthe*, **78**, 91.)

204. Dans une parabole, le foyer, le point où la tangente en un point de la courbe coupe la directrice, le milieu du rayon de courbure issu du point M sont en ligne droite.

(MARCHAND, N. A., **1561**.)

205. TP et TQ sont des tangentes à une parabole de foyer S; la droite TS rencontre le cercle TPQ en un point L; prouver, par la Géométrie pure, que TS = SL. (GENESE, N. A., **1572**.) (1)

(*D'Ocagne*, **88**, 442.)

---

(1) *Généralisation.* — Étant donnée une parabole, si l'on prend deux points A et B symétriques par rapport au foyer F, ces deux points, ainsi



206. Les côtés d'un triangle PQR inscrit à une parabole rencontrent l'axe AS aux points L, M, N et l'on prend sur AS des points L', M', N', tels que

$$AL.\,AL' = AM.\,AM' = AN.\,AN' = -AS^2,$$

A étant le sommet, S le foyer; démontrer, par la Géométrie pure, que les droites PL', QM', RN' se rencontrent sur la courbe. (GENESE, N. A., 1575.)

(*Servais*, **91**, 4*.)

207. SP_1 et SP_2 sont des tangentes à une parabole de foyer F; des points de contact P_1 et P_2 on abaisse des perpendiculaires sur la directrice; les deux pieds de ces perpendiculaires étant p_1 et p_2, montrer que les deux triangles

$$P_1FP_2 \quad \text{et} \quad p_1Sp_2$$

ont la même aire. (SCHRŒTER, N. A., 1605.)

(*Lemaire*, **91**, 28*.)

208. Étant données deux droites rectangulaires OX, OY et une circonférence ω touchant ces droites, démontrer, par la Géométrie, que le foyer d'une parabole touchant les lignes OX, OY et la circonférence ω, décrit une circonférence tangente à OX et OY.

Démontrer que la corde de contact de la parabole avec l'angle XOY enveloppe une hyperbole équilatère ayant pour foyer le point O. (WEILL, NEUBERG, M., 410.)

(*Jerabek*, **88**, 18.)

209. Soit P une parabole donnée de foyer F. D'un point M, arbitrairement choisi dans son plan, on mène à cette courbe les normales MA, MB, MC. Les tangentes aux points A, B, C for-

---

que les quatre points de contact des tangentes menées de A et de B à la parabole sont sur un même cercle. (*Bernard*, N. A., **88**, 444.)

ment un triangle A′B′C′. Démontrer que la circonférence A′B′C′ est vue du point M sous un angle constant α, tel que

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$ (De Longchamps, M., 733.)

(*Sollertinsky*, **92**, 28.)

210. M et M′ étant deux points d'une parabole, P le point de concours des tangentes en ces deux points, et F le foyer, démontrer que l'on a

$$\frac{PM^2}{MF} = \frac{PM'^2}{M'F}.$$

Existe-t-il un théorème analogue pour l'ellipse et l'hyperbole? (J. M., 333.)

(*Andrieu*, **81**, 550.)

211. Un cercle passe par le foyer d'une parabole et rencontre cette courbe au point A. En ce point, on mène la tangente à la parabole, laquelle rencontre le cercle au point B. Au point B, on mène les tangentes au cercle. Démontrer que cette droite est tangente à la parabole. (Weill, J. S., 127.)

(*Giat*, **86**, 69.)

Autres propriétés.

212. Une corde étant inscrite dans une parabole, le produit des distances des extrémités de cette corde, à un diamètre quelconque, est égal à la partie de ce diamètre interceptée entre la courbe et la corde, multipliée par le paramètre de l'axe principal. (N. A., 50.)

(*Vidal*, **43**, 145.)

213. Soit un polygone quelconque inscrit dans une parabole conique, et, pour fixer les idées, prenons un pentagone *abcde;* α, β, γ, δ, ε sont les projections respectives orthogonales des sommets sur la directrice. L'aire du pentagone *abcde* est égale à

$$\frac{\alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha + \alpha\gamma.\gamma\delta.\delta\alpha + \alpha\delta.\delta\varepsilon.\varepsilon\alpha}{2p},$$

où p est le paramètre principal. De même pour un autre polygone. (WARING, N. A., **282**.)

(*Genocchi*, *Sacchi*, **54**, 306.)

214. Dans toute parabole, la droite qui joint les milieux des rayons de courbure correspondant aux extrémités d'une corde focale quelconque passe par le foyer et par le pôle de la corde focale.

A cette propriété descriptive correspond la relation métrique

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}},$$

R, R′ étant les rayons de courbure et p le paramètre.

(PIGEON, N. A., **684**.)

(*Dyrion*, **64**, 324, 460.)

215. Étant donné un contour polygonal inscrit dans une parabole, et tel que les projections de ses côtés sur la directrice soient égales, on mène par chacun de ses sommets une parallèle P à l'axe de la parabole, puis on prolonge tous les côtés du contour dans le même sens jusqu'à la première P qu'ils rencontrent. Les segments ainsi déterminés sur les lignes P sont égaux.

(D'OCAGNE, N. A., **1410**.)

(*Moret-Blanc*, **83**, 322.)

216. On peut construire trois cercles osculateurs d'une parabole qui touchent une tangente à cette courbe : démontrer que cette tangente et les tangentes aux points d'osculation touchent un même cercle. (LAGUERRE, N. A., **1436**.)

(*Brisse*, **84**, 388.)

217. Une circonférence étant décrite sur une corde de parabole, prise comme diamètre, le segment de l'axe, déterminé par le diamètre et par la corde opposée, est égal au paramètre.

(CATALAN, N. C., **221**.)

(*Brun*, *Catalan*, **77**, 319, 321.)

218. Étant donnés deux points A et B d'une parabole incon-

nue, et la droite Δ, axe de cette courbe, on abaisse sur Δ les perpendiculaires AA′, BB′, qui se coupent en un certain point C. Démontrer que si, par le point C, on mène une parallèle à l'axe Δ, cette droite rencontre AB en un point qui appartient à la tangente au sommet, ce qui permet de déterminer simplement ce sommet. (De Longchamps, J. S., **13**.)

(*Devin*, **82**, 228; **83**, 39.)

219. On considère une parabole P, inscrite aux points A et B, dans l'angle ACB; si l'on désigne par M un point mobile sur P, on a constamment

$$\overline{MBA}^2 = 4 MCB . MCA. \qquad \text{(De Longchamps, J. S., 169.)}$$

(*Lemoine*, **87**, 238.)

220. Soient P_1 et P_2 deux points fixes pris sur une parabole, P un point variable sur la même courbe. Les droites PP_1 et PP_2 coupent le diamètre conjugué de la corde P_1P_2 en des points qui sont symétriques par rapport au point où ce diamètre coupe la parabole. (D'Ocagne, J. S., **225**.)

(*Balitrand*, **90**, 252.)

UNE PARABOLE. — PROBLÈMES.

221. Dans un triangle isoscèle donné, inscrire une parabole qui touche les deux côtés égaux, soit bornée par la base et dont l'aire soit un maximum. (Ramchundra, N. A., **555**.)

(*De Milleville*, **61**, 91.)

222. Inscrire dans une parabole un triangle *abc* semblable à un triangle donné ABC et dont un des sommets *a* soit situé en un point donné sur la courbe.

Cas particulier où le triangle ABC est équilatéral.

(N. A., **673**.)

(*Laisant*, **67**, 124.)

223. On donne une parabole et un point intérieur à cette courbe; faire passer par le point donné une circonférence doublement tangente à la parabole.

Détermination graphique du centre et du rayon de la circonférence. (N. A., **977.**)

(*Moret-Blanc*, **72**, 284.)

224. Par un point quelconque P pris dans le plan d'une parabole donnée, dont le sommet est en O, on mène à cette courbe trois normales qui la rencontrent aux points ABC. Les longueurs PA, PB, PC, PO étant représentées respectivement par a, b, c, l, on demande de former l'équation du troisième degré dont les racines sont $l^2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$, et d'indiquer les signes des racines d'après la position du point P dans les diverses régions du plan. (M. **152.**)

(*Boubals*, **85**, 131.)

225. Soient AB une corde dans une parabole, C le milieu de AB. On projette le point C en C′ sur l'axe et l'on mène par ce point une perpendiculaire à AB, perpendiculaire qui rencontre l'axe au point D. Démontrer que, quel que soit AB, C′D est constamment égal à p. Déduire de ce théorème une solution du problème qui consiste à trouver le sommet d'une parabole, connaissant deux points et l'axe de la courbe.

Déduire aussi de la propriété précédente ce théorème connu que les normales A et B coupent l'axe en des points équidistants du point D. (De Longchamps, J. S., **10.**)

(*Finat*, **82**, 283; **83**, 61.)

UNE CONIQUE A CENTRE UNIQUE.

—

Tangentes et normales.

226. La portion d'une normale comprise entre une conique et un axe principal, multipliée par la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente qui passe par l'extrémité de la normale, donne un produit constant, pour le même axe principal.

(N. A., **122**.)

(*D'André*, **46**, 331.)

227. Une tangente à une conique étant interceptée par deux autres tangentes parallèles, le produit des segments formés sur la première tangente par le point de contact est égal au carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente.

(Hamilton, N. A., **197**.)

(*Murent*, **49**, 413.)

228. Soient δ, δ', δ'' les distances du centre d'une conique à trois tangentes, et ρ, ρ', ρ'' les distances de ce centre aux points de contact; on a

$$\delta^2\rho^2(\delta''^2-\delta'^2)+\delta'^2\rho'^2(\delta^2-\delta''^2)+\delta''^2\rho''^2(\delta'^2-\delta^2)=0.$$

(Housel, N. A., **645**.)

(*Raynaud*, **63**, 277.)

229. Si l'on cherche le lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse ou à une hyperbole des tangentes faisant un angle donné, on trouve une équation de la forme

$$(x^2+y^2)^2=Ax^2+By^2+C.$$

Réciproquement, étant donnée une équation de cette forme, peut-on trouver une ellipse ou une hyperbole telles, que si d'un

point de la courbe donnée on mène des tangentes à l'ellipse ou à l'hyperbole, ces tangentes fassent un angle donné? Le problème a-t-il plusieurs solutions? (**Darboux**, N. A., **753**.)

(*Massing,* **66**, 329.)

230. Les deux circonférences menées par les foyers d'une conique, et qui touchent une tangente de cette conique, se coupent toujours sous le même angle. (**Faure**, N. A., **1071**.)

(*Gambey,* **72**, 473, 523.)

231. Soient P un point pris sur l'axe d'une conique à centre et MN une tangente quelconque limitée aux deux perpendiculaires élevées aux extrémités de cet axe : démontrer que la puissance du point P, par rapport à la circonférence de diamètre MN, est constante. (**Laisant**, N. A., **1178**.)

(*Sondat,* **75**, 472.)

232. D'un point M on mène trois normales à une conique; soient P le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois pieds de ces normales et O le centre de la conique : démontrer que la droite OP et la quatrième normale que l'on peut mener du point M à la courbe sont également inclinées sur les axes.

Si la conique est une hyperbole équilatère, la droite OP passe par le pied de la quatrième normale. (**Laguerre**, N. A., **1231**.)

(*Moret-Blanc,* **78**, 86.)

233. De deux points situés sur l'axe des x et équidistants de l'origine, on mène des tangentes à la conique représentée par l'équation

$$ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x = 0;$$

prouver que les points d'intersection de ces tangentes sont sur la conique $by^2 + hxy - x = 0$. (**Wolstenholme**, N. A., **1465**.)

(*Moret-Blanc,* **83**, 522; **84**, 441.)

234. Une corde supplémentaire AM d'une conique, et la per-

pendiculaire AI à l'autre corde supplémentaire A'M, déterminent, sur la tangente A'CD, au sommet A', deux segments A'C, A'D dont le rapport est constant. Examiner les cas particuliers. (BROCARD, N. C., 259.)

(*Orth,* **77**, 330.)

Autres questions.

235. Étant donnés une conique dont les foyers sont F et F' et un point quelconque M dans l'intérieur de cette conique; si l'on mène MF rencontrant la conique en A et B et MF' rencontrant la conique en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MC}+\frac{1}{MD}.$$

Lorsque le point M est extérieur, les sommes sont remplacées par des différences. (MANNHEIM, N. A., 348.)

(*Bourdelles,* **57**, 50, 82.)

236. Soient P un point d'une conique, C le centre de courbure en P, O le centre de la conique; par C on mène une parallèle à la tangente en P; soit D le point où cette parallèle est rencontrée par le diamètre OP; on a CD égal au *tiers* du rayon de courbure de la *développée* en C. (TRANSON, N. A., 493.)

(*Siacci, Sacchi,* **60**, 5, 83, 216; **62**, 321.)

237. Un polygone d'un nombre pair de côtés étant inscrit dans une conique, si l'on mène par son centre des parallèles à chaque côté du polygone, de manière à former un parallélogramme en chacun de ses sommets, la somme des inverses des parallélogrammes de rang pair est égale à la somme des inverses des parallélogrammes de rang impair. (FAURE, N. A., 589, 596.)

238. Si l'on désigne par *a*, *b*, *c* trois demi-diamètres d'une



conique, par A et B ses demi-axes principaux, on a la relation

$$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}=\left[\frac{\sin 2(b,c)}{a^2}+\frac{\sin 2(c,a)}{b^2}+\frac{\sin 2(a,b)}{c^2}\right]\times\frac{1}{2\sin(a,b)\sin(b,c)\sin(c,a)}.$$

(FAURE, N. A., **668**.)

(*Aoust, Lemonnier*, **63**, 519; **64**, 66.)

239. Si a et b sont les demi-axes d'une conique, r, r_1, r_2 trois demi-diamètres quelconques, démontrer que l'on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{4\sin^2\widehat{rr_1}\sin^2\widehat{r_1r_2}\sin^2\widehat{r_2r}}{a^2b^2}&=\frac{2\sin^2\widehat{rr_1}\sin^2\widehat{r_1r_2}}{r^2r_2^2}+\frac{2\sin^2\widehat{r_1r_2}\sin^2\widehat{r_2r}}{r_1^2r^2}\\&+\frac{2\sin^2\widehat{r_2r}\sin^2\widehat{rr_1}}{r_2^2r_1^2}-\frac{\sin^4\widehat{rr_1}}{r_2^4}\\&-\frac{\sin^4\widehat{r_1r_2}}{r^4}-\frac{\sin^4\widehat{r_2r}}{r_1^4},\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin\widehat{rr_1}\sin\widehat{r_1r_2}\sin\widehat{r_2r}\\&=\frac{\sin 2(\widehat{rr_1})}{2r_2^2}+\frac{\sin 2(\widehat{r_1r_2})}{2r^2}+\frac{\sin 2(\widehat{r_2r})}{2r_1^2},\end{aligned}\right.$$

relations dans lesquelles $\widehat{rr_1}$, $\widehat{r_1r_2}$, $\widehat{r_2r}$ représentent les angles que les demi-diamètres r, r_1, r_2 font entre eux.

Conséquences de ces formules. (AOUST, N. A., **676**.)

(*Lemonnier*, **64**, 66.)

240. $My^2+Nx^2-1=0$ étant l'équation d'une conique;

α, β, γ représentant les angles faits avec l'axe des x par les trois côtés d'un triangle inscrit dans la conique;

x_0, y_0, r représentant les coordonnées du centre et le rayon du cercle circonscrit à ce triangle;

on a les relations suivantes :

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{N x_0}{r(M - N)},$$

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{M y_0}{r(M - N)},$$

$$M[y_0 - r\cos(\alpha + \beta + \gamma)]^2 + N[x_0 - r\sin(\alpha + \beta + \gamma)]^2 - 1 = 0.$$

(MATHIEU, N. A., **749**.)

(*Massing,* **66**, 366.)

241. Dans une conique à centre, inscrire un quadrilatère maximum ayant pour un de ses côtés un diamètre donné, et pour côté opposé une corde parallèle à une droite donnée.
(GABRIEL-MARIE, N. A., **1302**.)

(*Moret-Blanc,* **79**, 425.)

242. Par un point fixe P de l'axe focal d'une ellipse ou d'une hyperbole, on mène une sécante quelconque rencontrant la courbe en M, M'. Démontrer qu'il existe une constante r, telle que le produit (FM + r) (FM' + r) a une valeur constante, F étant l'un des foyers. (STEINER, M., **666**.)

(*Choisis,* **90**, 46.)

UNE CONIQUE EN GÉNÉRAL. — PROPRIÉTÉS.

Tangentes et normales.

243. Par un point A situé dans le plan d'une conique, on mène un diamètre, une seconde droite conjuguée à ce diamètre et une troisième droite quelconque rencontrant la courbe en deux points; menant deux tangentes par ces deux points, elles coupent la seconde droite en deux points également distants du point A. (N. A., **29**.)

(*Pury,* **42**, 356.)



244. La normale et la tangente menées par un point d'une conique interceptent, sur un axe principal, une longueur égale au produit des rayons vecteurs passant par ce point, divisé par la distance du point au second axe principal; dans la parabole cette longueur est égale au double du rayon vecteur.

(PONCELET, N. A., 36.)

(*Vachette*, **42**, 507; **43**, 237.)

245. On donne une conique et un point fixe O dans son plan. Du point O on mène deux droites OA, OB perpendiculaires entre elles qui coupent la conique en A et B. On joint le point A au point B et l'on mène en chacun de ces points les tangentes AT, BT à la conique; on projette le point O sur les trois côtés du triangle ABT; par les trois points ainsi obtenus on fait passer une circonférence. Pour chacune des positions de l'angle droit, on obtient ainsi une circonférence; démontrer que toutes ces circonférences sont tangentes à une même circonférence.

(MANNHEIM, N. A., 613.)

(*Bauquenne*, **66**, 277, 459.)

246. Une conique passant par quatre points m, n et p, q, soit h le point de rencontre des droites mn et pq, et désignons respectivement par a et b les points où une tangente quelconque à la conique coupe les droites mn et pq.

Démontrer que l'on a la relation suivante

$$\frac{\sqrt{am.bp}}{\sqrt{hm.hp}} + \frac{\sqrt{an.bq}}{\sqrt{hn.hq}} = C\sqrt{ah.bh},$$

la lettre C désignant une constante. (LAGUERRE, N. A., 989.)

247. Les segments d'une normale en deux points d'une conique, compris entre ces points et un axe de la courbe, sont vus sous le même angle du point de concours des tangentes en ces points. (J. BRUNO, N. A., 1205.)

(*Pellissier*, **76**, 334.)

248. Soient a et m deux points quelconques d'une conique,

b et c les extrémités d'une corde parallèle à la tangente en a. Menons par les points b et c des parallèles à la droite am, qui rencontrent la conique aux points b' et c' respectivement; la droite $b'c'$ est parallèle à la tangente au point m.

(GENTY, N. A., 1494.)

(*Goffart*, **84**, 492, 528.)

249. A, B, C étant trois points d'une conique, les parallèles menées par C aux tangentes en A et B coupent respectivement les rayons OA et OB issus du centre O aux points D et E; démontrer que DE est parallèle à la tangente en C.

(GREENSTREET, N. A., 1615.)

(*Duporcq*, **91**, 41*.)

250. Dans toute conique, le diamètre conjugué de la bissectrice de l'angle des axes coupe la courbe en P. La normale en P détermine le segment dont l'aire est un minimum.

(LEMOINE, N. C., 384.)

(*Catalan*, **80**, 464.)

251. Une conique est inscrite dans un parallélogramme ABCD. La tangente menée en un point M de la courbe rencontre les côtés BC, CD respectivement en R, Q; la parallèle à BC par M coupe AB en L, et la parallèle à CD par M coupe AD en N. Démontrer que les triangles LMQ, NMR sont équivalents.

(GENESE, M., 746.)

252. Le centre d'un cercle bitangent à une conique, la projection d'un point quelconque de la conique sur la corde des contacts et l'intersection de la normale en ce point avec l'axe qui ne contient pas le centre du cercle sont en ligne droite.

(TISSOT, J. S., 323.)

Foyers et directrices.

253. Si, par le foyer d'une conique, on conçoit *analytiquement* deux tangentes à la conique, les coefficients angulaires de

ces tangentes, par rapport à une droite quelconque prise pour axe, sont représentés par $\pm\sqrt{-1}$, les axes étant rectangulaires. (N. A., **159.**)

(*Moutier*, **47**, 366.)

254. Une conique étant rapportée à des axes rectangulaires, si le coefficient angulaire d'une tangente menée par un point est égale à $\sqrt{-1}$, ce point est un foyer. (PLÜCKER, N. A., **168.**) (¹)

(*Moutier*, **47**, 483.)

255. Soient F et D le foyer et la directrice correspondante d'une conique; A_1, A_2 deux points fixes sur la conique, et M un point *variable* aussi sur la conique; les droites MA_1, MA_2 rencontrent respectivement la directrice aux points P et Q; la distance PQ est vue du foyer F sous un angle constant, quelle que soit la position de M sur la conique. (FAURE, N. A., **413.**)

(*Cornut*, *Legrandais*, **58**, 179, 180, 435; **72**, 81.)

256. Une conique passant par trois points A, B, C touche une droite donnée; appelons α, β, γ les distances respectives de ces trois points à la droite; F étant un des foyers de la conique, on a la relation

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\left[(FB-FC)^2-\overline{BC}^2\right]^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}\left[(FC-FA)^2-\overline{AC}^2\right]^{\frac{1}{2}} +\gamma^{\frac{1}{2}}\left[(FA-FB)^2-\overline{AB}^2\right]^{\frac{1}{2}}=0.$$

Observation. — On a ainsi très simplement le lieu du foyer des coniques qui passent par trois points donnés et touchent une droite donnée. Les coordonnées cartésiennes mènent à une équation du soixante-quatrième degré. (FAURE, N. A., **548.**)

(*De Jonquières*, *Neuberg*, **61**, 85; **68**, 221.)

(¹) On remarquera que les deux énoncées 253, 254 au fond sont identiques. Nous avons cru devoir les maintenir à cause de la différence des rédactions et de leur brièveté. Au surplus, il s'agit là d'une question devenue classique aujourd'hui.

257. Lorsqu'une conique est inscrite à un triangle, son paramètre est égal au diamètre d'un cercle inscrit au triangle, multiplié par le produit des sinus des angles formés par le cercle avec les droites qui joignent l'un des foyers de la conique aux sommets du triangle. (Faure, N. A., **832**.)

(*Kœhler*, **70**, 376.)

258. Soit une conique ayant pour foyer le point F, et soit n le pied de la perpendiculaire abaissée d'un foyer F sur la directrice correspondante; du foyer, abaissons les perpendiculaires Fm et Fm' sur deux tangentes quelconques et la perpendiculaire Fn' sur la corde qui joint les points de contact des tangentes; les quatre points m, m', n et n' sont sur une même circonférence, et ils partagent cette circonférence harmoniquement.

(Laguerre, N. A., **978**.)

(*Conradt*, **72**, 504.)

259. On donne deux tangentes et un foyer d'une conique; démontrer que la corde des contacts passe par un point fixe.

(Besant, N. A., **1193**.)

(*Robert*, **76**, 239.)

260. Démontrer que le point où la normale en un point quelconque M d'une conique rencontre l'axe non focal appartient à la droite qui joint un foyer de la conique à la projection du point M sur la directrice correspondant à ce foyer.

(Rouché, N. A., **1612**.)

(*Brocard*, **91**, 35*, 41*.)

261. Soit

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une conique, les axes de coordonnées étant rectangulaires. Posons

$$\varphi = (f'x)^2 + (f'y)^2 - 4(A + C)f(x,y) = 0,$$

l'équation des quatre directrices de la conique est

$$\varphi^2 + 4(A + C)f\varphi - 16\delta f^2 = 0$$

ou

$$\delta = AC - B^2.$$

L'équation $\varphi = 0$ représente le cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique. (J. M. 345.)

(*Cadot*, J. S., **82**, 67.)

262. Étant donnée une conique, autour d'un point fixe P de son plan on fait tourner une sécante PDD′, et l'on joint un foyer F aux points D et D′ où cette droite rencontre la courbe. Démontrer que l'on a

$$\tang\frac{PFD}{2}\tang\frac{PFD'}{2} = \text{const.} \quad (\text{J. M., 396.})$$

(J. S., **83**, 130.)

Pôles et Polaires. — Triangles conjugués. Polaires réciproques. — Rapports anharmoniques.

263. Dans une conique, le rapport *anharmonique* du faisceau de quatre diamètres est égal au rapport anharmonique de quatre diamètres respectivement conjugués. (Salmon, N. A., 394.)

(*Colombier*, **57**, 447; **58**, 11.)

264. La polaire réciproque d'un cercle, relativement à un cercle de centre O, est une conique ayant pour foyer O et pour directrice la polaire de O relativement au cercle donné, et $\frac{d}{r}$ pour rapport focal; d égale la distance des centres et r le rayon du cercle donné. (N. A., 395.)

(*Laquière*, **61**, 30, 42.)

265. Étant données deux figures homographiques dans un

même plan, soient m, m', m'' les points du plan qui coïncident avec leurs homologues respectifs ([1]).

1° Si une conique est circonscrite au triangle $m'm''m'''$, il n'existe sur cette conique *que deux* points tels, que deux droites tournant autour de ces points et se coupant sur la conique soient toujours homologues dans les deux figures.

2° Si une conique est inscrite au triangle $m'm''m'''$, il n'existe que *deux* tangentes à cette conique telles, qu'une droite roulant sur la conique coupe ces tangentes en deux points toujours homologues dans les deux figures. (P. Lafitte, N. A., **558**.)

(*Viant*, **66**, 327.)

266. Étant donnés un triangle *conjugué* à une conique et un cercle circonscrit au triangle, le produit des distances du centre de la conique aux côtés du triangle, multiplié par le diamètre du cercle circonscrit, est égal au produit des carrés des demi-axes de la conique.

Un théorème analogue existe pour les surfaces du second degré. (Faure, N. A., **560**.)

(*Schnée*, **63**, 513; **67**, 436; **70**, 366.)

267. Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle relativement à une conique *quelconque* inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante. (Faure, N. A., **590**, **597**.)

(*Neuberg*, **66**, 37, 511.)

268. Lorsqu'un triangle est conjugué à une conique, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale à la puissance de son centre relativement au cercle circonscrit au triangle.

(Lescaze, Faure, N. A., **609**.)

(*De Saint-Michel*, *Faure*, **62**, 116, 159, 179; **63**, 16.)

([1]) Par abréviation on pourrait dire des *points homologues doubles;* de même pour les lignes.

(*Note de Terquem.*)

269. On prend le sommet d'un des trois angles dont les côtés réunissent, deux à deux, quatre points donnés d'une conique, et l'on cherche par rapport aux côtés de cet angle la *conjuguée harmonique* de la droite qui joint ce sommet au centre de la conique : démontrer que cette conjuguée et les deux droites analogues sont parallèles. (HOUSEL, N. A., 632.)

(*Laval*, **63**, 49, 51.)

270. On donne sur un plan une conique et un point fixe; on abaisse de ce point des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle conjugué à la conique et par les pieds de ces perpendiculaires on fait passer une circonférence. Pour chaque triangle conjugué à la conique, on décrit ainsi une circonférence : toutes ces circonférences ont le même centre radical.

(MANNHEIM, N. A., 744.)

(*Picquet*, **66**, 151.)

271. Dans un triangle inscrit à une conique, le pôle d'un côté et les seconds points d'intersection de la courbe et des bissectrices des angles formés au sommet opposé sont en ligne droite.

(MATHIEU, N. A., 825.)

(*Willière*, **67**, 556, 557.)

272. Deux droites qui divisent harmoniquement les trois diagonales d'un quadrilatère rencontrent en quatre points harmoniques toute conique inscrite dans le quadrilatère.

(CREMONA, N. A., 872.)

(*Willière*, **71**, 282.)

273. La conique dont l'équation est

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 = 0$$

divise harmoniquement les diagonales du quadrilatère complet représenté par

$$\alpha\beta\gamma\delta = 0.$$ (HESSE, N. C., 48.)

(*Van Aubel*, **77**, 165.)

274. Le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D

d'une conique est égal à la racine carrée du rapport anharmonique du faisceau P (ABCD) qui a pour centre le pôle P de la droite AB. (TARRY, M., 675.)

(*Anderson*, **90**, 258; **91**, 98.)

275. On donne une conique et deux points A, B pris sur la courbe. Démontrer qu'il existe deux points jouissant de la propriété suivante :

Une droite quelconque menée par l'un ou l'autre de ces points rencontre la conique en deux points P, Q tels que la somme des angles APB et AQB est constante.

Ces deux points sont le pôle et le milieu de la corde EF qui est vue des points A et B, sous des angles droits.

(TARRY, M., 685.)

(*Kluyver*, **91**, 171.)

276. Soient t et n la tangente et la normale en un point O d'une conique, P le pôle de la normale n, d une droite quelconque menée par P. Si la tangente, en un point quelconque M de la conique, coupe la tangente t au point T, et que la perpendiculaire élevée en O, à OM, coupe la droite d au point S; la droite ST passe par un point fixe H de la normale n.

Faisant coïncider le point M avec le point diamétralement opposé au point O, on voit que le point H est le pied de la perpendiculaire abaissée sur n, du point où la droite d est coupée par la perpendiculaire élevée en O, au diamètre passant en ce point.

Corollaire. — Soient t la tangente en un point O d'une conique, P le pôle de la normale correspondante, δ la perpendiculaire abaissée sur le diamètre passant au point O. Si la tangente en un point M quelconque de la conique coupe la tangente t au point T, et que la perpendiculaire élevée en O, à OM, coupe la droite δ au point S, la droite ST est perpendiculaire à la tangente t. (D'OCAGNE, J. S., 240.)

(*Cazaly*, **90**, 277.)

Points en ligne droite ou sur une conique. Droites concourantes, ou tangentes à une conique.

277. Soit ABC un triangle inscrit dans une section conique; d'un point O de cette courbe, on mène les droites OM, ON, OP, respectivement conjuguées aux côtés AB, BC, CA [1], et rencontrant ces côtés aux points M, N, P : démontrer que les trois points M, N, P sont sur une même droite. (N. A., **4**.)

(*Terquem*, **43**, 268.)

278. Soit ABC un triangle inscrit dans une conique; soit mené un diamètre parallèle à la tangente qui passe par A; ce point, le milieu de la portion du diamètre parallèle interceptée entre AB et AC et le pôle du côté BC sont sur une même droite.

(Chasles, N. A., **40**.)

(*Ritt*, **44**, 391.)

279. Deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ étant inscrits dans la même conique; si les trois points d'intersection (AB, A′B′), (BC, B′C′), (CD, C′D′) sont sur une même droite, le point d'intersection (DA, D′A′) sera sur la même droite.

(Plücker, N. A., **108**.)

(*P. Serret*, **47**, 356.)

280. Un polygone de $4m+2$ côtés étant inscrit dans une conique, les côtés opposés donnent $2m+1$ points d'intersection; si $2m$ de ces points sont sur une même droite, le point restant est sur la même droite. (N. A., **109**.)

(*P. Serret*, **47**, 356.)

281. Un polygone de $4m+2$ côtés étant circonscrit à une conique, $2m+1$ diagonales passent par les sommets opposés;

---

[1] Deux droites sont dites conjuguées, lorsqu'elles sont parallèles à deux diamètres conjugués.

si $2m$ de ces diagonales passent par le même point, la diagonale restante passe par le même point. (N. A., **110.**) (¹).

(*P. Serret*, **47**, 356.)

282. Par un point M d'une conique on mène les cordes MA, MB, MC, ...; par les points A, B, C, ... on mène des droites respectivement conjuguées aux droites MA, MB, MC, ...; toutes ces droites concourent en un même point situé sur la conique.

(P. Serret, N. A., **156.**)

283. Soient un triangle ABC et un point p dans le plan du triangle; par le point p menons trois droites, de sorte que p soit le milieu de la partie rr' interceptée entre les côtés a et b, de la partie ss' interceptée entre b et c, et de la partie tt' interceptée entre c et a; les six points r, r', s, s', t, t' sont sur une même conique M. Menant par le sommet A une droite α formant, avec les trois droites b, c, pA, un faisceau harmonique, et, d'une manière analogue, une droite β en B, et γ en C, il existe une conique M' qui touche les trois droites α, β, γ en A, B, C, et la conique M' est homothétique à la conique M.

(Steiner, N. A., **270.**)

(*Janni,* **62**, 335.)

284. *Mêmes données qu'à l'énoncé précédent.* — Par le point p et les sommets A, B, C on mène trois droites rencontrant respectivement les côtés a, b, c en a_1, b_1, c_1; si l'on a

$$\mathrm{A}p.\mathrm{B}p.\mathrm{C}p = a_1p.b_1p.c_1p,$$

le lieu des points p est une ellipse circonscrite au triangle, et ayant pour centre le centre de gravité du triangle.

(Steiner, N. A., **271.**)

(*Khorassandji*, **53**, 289.)

(¹) Ces trois dernières questions des N. A. doivent porter les nᵒˢ 107, 108, 109, et non 108, 109, 110. Nous laissons néanmoins les numéros erronés, pour rendre les recherches plus faciles dans la collection, vu que la correction sur la plupart des exemplaires n'a sans doute pas été faite.

285. On donne : 1° une conique; 2° deux tangentes *fixes* à cette conique; 3° deux points fixes dans le plan de la conique; 4° une tangente mobile qui rencontre les deux tangentes fixes en deux points variables formant avec les points fixes les sommets d'un quadrilatère variable; les diagonales de ce quadrilatère se coupent suivant des points situés sur une conique passant par des points fixes; énoncer le théorème correspondant d'après le principe de dualité. (N. A., **488**.)

(*Kessler*, **60**, 80.)

286. Les six points milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère, les deux points où se coupent les côtés opposés, le point d'intersection des deux diagonales, sont sur une même ligne du second degré.

Lorsque les quatre sommets du quadrilatère appartiennent à une circonférence, la ligne du second degré sur laquelle se trouvent les neuf points désignés est une hyperbole équilatère qui passe par le centre de la circonférence, et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles que forment les deux diagonales du quadrilatère. (N. A., **626**.)

(*Hans*, **62**, 458, **64**, 265.)

287. *Hexagramme de Pascal* (*réciproque*). — Si trois angles ont leurs sommets en ligne droite, leurs côtés sont les côtés opposés d'un hexagone inscriptible dans une conique.

(BARBIER, N. A., **842**.)

(*Barbier*, **68**, 185, 186.)

288. Si par un point O on mène trois lignes respectivement parallèles aux côtés d'un triangle donné, les six points de rencontre de ces lignes avec les côtés sont sur une conique.

(S. ROBERTS, N. A., **873**.)

(*Endrès*, **68**, 550, **70**, 559.)

289. On considère deux tangentes fixes AC, BC aux points A

et B d'une conique fixe; C est le point de rencontre des tangentes, AB est la corde des contacts.

Par chacun des points A et B, on mène une sécante quelconque; ces deux sécantes rencontrent la conique en μ et ν respectivement. Les droites $A\mu$, $A\nu$ coupent la tangente BC en M et N; les droites $B\mu$, $B\nu$ coupent la tangente AC en M' et N'. Ceci admis, on a les deux propriétés suivantes :

1° Le rapport anharmonique des quatre points A, C, M', N' est égal à celui des quatre points C, B, M, N;

2° Les quatre droites AB, $\mu\nu$, MN', M'N passent par un même point. (PAINVIN, N. A., **1141**.)

(*Marquet*, **74**, 347.)

290. On donne, dans un plan, un triangle, une conique circonscrite et une droite quelconque. On prend le milieu (toujours réel) de la droite, considérée comme corde de la conique, et les symétriques, par rapport à ce milieu des trois points où la droite rencontre les côtés du triangle. Démontrer que les trois droites obtenues en joignant ces symétriques aux sommets opposés du triangle vont concourir sur la conique.

(MATHIEU, N. A., **1242**.)

(*Pisani*, **77**, 525.)

291. D'un point donné M on abaisse les normales à une conique; soient a_i et a_j deux quelconques des pieds de ces normales, α_{ij} le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur la corde $a_i a_j$, et β_{ij} le conjugué harmonique du point α_{ij} relativement aux points a_i et a_j.

Il y a six points β_{ij} : démontrer qu'ils sont les sommets d'un quadrilatère complet.

Quelle est la propriété analogue relativement à une surface du second ordre? (LAGUERRE, N. A., **1341**.)

(*Bresson*, **80**, 475.)

292. On donne une conique inscrite dans un triangle ABC; par les sommets du triangle on mène des droites AA', BB', CC'

se coupant en un point O, et par leurs points de rencontre A′, B′, C′ avec les côtés opposés, des tangentes à la conique qui coupent les droites B′C′, C′A′, A′B′ en des points *a*, *b*, *c*. Démontrer que ces trois points sont en ligne droite.

(Fauquembergue, N. A., **1397**.)

(*Moret-Blanc*, **82**, 382.)

293. On donne une conique fixe et deux points A et A′ situés sur une tangente à cette courbe. Par le point A′, on mène une seconde tangente qui touche en un point *d* la conique. On mène la droite A*d* qui rencontre de nouveau la conique au point *e*, la droite A′*e* qui coupe la conique au point *f*, et enfin la droite A*f* rencontrant de nouveau la conique au point *g*.

Démontrer que la tangente à la conique au point *g*, et la droite A′*ef* se coupent en un point de la seconde tangente menée du point A à la courbe. (Genty, N. A., **1423**.)

(*Goffart*, **83**, 375.)

294. On donne un triangle ABC, une conique K et un point O sur cette conique. Les droites OA, OB, OC coupent la conique K respectivement aux points A′, B′, C′. De plus, le côté BC rencontre cette conique aux points A″, A‴; le côté AC aux points B″, B‴; le côté AB aux points C″, C‴. Démontrer que les triangles A′A″A‴, B′B″B‴ et C′C″C‴ sont circonscrits à une même conique. (D'Ocagne, N. A., **1513**.)

295. Soient donnés deux points P, P_1 du plan d'un triangle ABC; on désigne de la manière suivante les points d'intersection :

$$(PA,\ BC) = a, \qquad (P_1A,\ BC) = a_1,$$
$$(PB,\ CA) = b, \qquad (P_1B,\ CA) = b_1,$$
$$(PC,\ AB) = c, \qquad (P_1C,\ AB) = c_1;$$

$$(bc_1,\ cb_1) = A_1, \qquad (bc,\ b_1c_1) = A_2,$$
$$(ca_1,\ ac_1) = B_1, \qquad (ca,\ c_1a_1) = B_2,$$
$$(ab_1,\ bc_1) = C_1, \qquad (ab,\ a_1b_1) = C_2.$$

Les cinq points

$$P,\ P_1,\ A_1,\ B_1,\ C_1$$

sont en ligne droite.

Les quatre points

$$\left.\begin{matrix} A,\ A_1,\ B_2,\ C_2 \\ B,\ B_1,\ C_2,\ A_2 \\ C,\ C_1,\ A_2,\ B_2 \end{matrix}\right\}\ \text{sont en ligne droite.}$$

Les trois droites

$AA_2,\ BB_2,\ CC_2$ concourent au même point O,

$aA_2,\ bB_2,\ cC_2$ concourent au même point Q,

$a_1A_2,\ b_1B_2,\ c_1C_2$ concourent au même point R.

Les huit points

$$a,\ b,\ c;\quad a_1,\ b_1,\ c_1;\quad Q,\ R$$

sont situés sur une conique, etc. (SCHROETER, N. A., 1562.)

(*Lez*, **91**, 13*, 37*.)

296. Par les sommets A, B, C d'un triangle inscrit dans une conique, on mène à la courbe des tangentes qui rencontrent les côtés opposés en A′, B′, C′; les milieux de AA′, BB′, CC′ sont en ligne droite.

Dans le cas particulier du cercle, cette droite est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

(FARJON, N. A., 1602.)

(*E. Lemoine,* **91**, 30*.)

297. Étant donnés cinq points d'une conique, on en prend quatre pour les sommets d'un quadrilatère et l'on mène, par le cinquième, deux droites quelconques, la première rencontrant deux côtés opposés en deux points, la seconde rencontrant les autres côtés aussi en deux points : les droites qui joignent ces points combinés deux à deux forment avec chaque groupe de côtés opposés deux quadrilatères tels que leurs diagonales se rencontrent sur la conique. (CARNOY, M. 33.)

(*Neuberg*, **83**, 219.)

Courbure. — Cercles osculateurs. — Développées.

298. D'un point M pris dans le plan d'une conique, on mène deux tangentes MP, MP' à cette conique; r et r' étant les rayons de courbure en P et P', on a la proportion $\frac{\overline{MP}^3}{\overline{MP'}^3} = \frac{r}{r'}$.

(UMPFENBACH, N. A., **210**.)

(*Ploix*, **49**, 444.)

299. Si l'on prolonge le rayon de courbure d'une conique, à l'extérieur, d'une longueur égale à ce rayon, le cercle décrit sur ce prolongement comme diamètre coupe orthogonalement le lieu géométrique du sommet de l'angle droit circonscrit à la même conique. (STEINER, N. A., **211**.)

(*Ploix*, **50**, 59, 273.)

300. Par tout point A d'une conique passent quatre cercles osculateurs, ayant leurs points de contact en A, B, C, D; le centre de la conique est le centre de moyenne distance des trois points B, C, D. (JOACHIMSTHAL, N. A., **215**.)

(*Murent*, **50**, 56, 151.)

301. Soient M un point pris sur une conique, I le point où la normale en M rencontre l'axe focal FF'; élevons en I une perpendiculaire à la normale MI, et soit K le point où cette perpendiculaire coupe le rayon vecteur MF; élevons en K une perpendiculaire à ce rayon vecteur, et soit C le point où cette perpendiculaire coupe la normale MI; MC est le rayon de courbure en M. (P. SERRET, N. A., **217**.)

(*Estienne*, **50**, 215.)

302. Une conique étant inscrite dans un triangle, soient respectivement α, β, γ les rayons de courbure de la conique aux

points où elle touche les côtés a, b, c du triangle; on a

$$8S = \left(-\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} - \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right),$$

S désignant l'aire du triangle. (FAURE, N.A., **584**.)

(*Mention, Neuberg,* **61**, 302; **70**, 136.)

303. Les rayons de courbure aux extrémités d'une corde quelconque d'une conique sont proportionnels aux cubes des distances de ces points au pôle de la corde.

(DEMOULIN, N. A., **1595**.) [1].

(*De Crès,* **91**, 11*.)

304. La tangente en un point de la développée d'une conique coupe cette développée en quatre points, outre le point de contact. Démontrer que les tangentes en ces points sont concourantes et se coupent sur l'ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée. (DUPORCQ, N. A., **1616**.)

305. Démontrer que, dans toute conique, un point quelconque M, le centre de courbure correspondant, et les points d'intersection de la normale en M avec les perpendiculaires FG, fg, menées des foyers F, f aux rayons vecteurs FM, fM, sont conjugués harmoniques. (N. C., **423**.)

306. Par un point M d'une conique, on peut faire passer trois circonférences osculatrices à cette courbe, en des points P, Q, R. Le centre de gravité du triangle PQR se trouve sur l'un des axes de la conique. (ZAHRADNIK, N. C., **412**, **435**.)

(*Laisant*, **79**, 24.)

307. On donne deux circonférences O et O_1 qui se coupent en A et B. Démontrer qu'il n'existe qu'une seule conique osculatrice

(1) *Voir* plus haut, question 298.

en A au cercle O_1 et osculatrice aussi au cercle O. Déterminer le point d'osculation au cercle O. (DEWULF, M., **414**.)

(*Servais*, **88**, 33; **90**, 57; **91**, 41.)

308. Si, en un point quelconque A d'une conique, on mène un cercle tangent dont le rayon soit double du rayon de courbure en ce point : 1° le pôle P, par rapport au cercle, de la corde d'intersection BC de la conique et du cercle est sur la conique; 2° les deux droites BC et PA sont conjuguées harmoniques par rapport à la conique. (SERVAIS, M., **667**.)

(*Déprez*, **91**, 42.)

Autres propriétés.

309. Soient

$$(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\alpha', \beta', \gamma'), \quad \lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

les coordonnées de deux points et l'équation d'une droite situés dans le même plan. Posons

$$u = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}, \qquad v = s \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}, \qquad w = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

$uw - v^2 = 0$ est l'équation d'une conique qui passe par les deux points et touche la droite; a, b, c, s sont des constantes arbitraires. (CAYLEY, N. A., **374**.)

(*Combescure*, **57**, 297.)

310. Tous les cercles qui sont la perspective d'une même conique sur un même plan ont pour axe radical commun l'intersection de ce plan avec le plan de la conique.

(BÖKLEN, N. A., **471**.)

(*Chabirand*, **59**, 248.)

311. Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle, la

somme des carrés de ses demi-axes est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle des neuf points, multiplié par le produit des distances de ce centre aux côtés du triangle et divisé par le produit des distances de ce centre aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle.

(FAURE, N. A., **547**, **561**.)

(*Brisse, Driant*, **64**, 253; **67**, 327.)

312. Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle qui a les sommets du triangle donné pour points conjugués.

(FAURE, N. A., **562**.)

(*Brisse*, **64**, 257, 393; **66**, 308.)

313. Étant donné un contour polygonal fermé de $2n$ côtés inscrit dans une conique, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la conique sur les côtés de rang pair est dans un rapport constant avec le produit des perpendiculaires abaissées du même point sur tous les côtés de rang impair.

(CHASLES, N. A., **939**.)

(*Fouret*, **69**, 544, 547.)

314. On donne une conique et dans le même plan une droite D, sur la conique deux premiers points fixes M, N et un troisième point variable a; les droites aM, aN interceptent sur la droite D un segment mn dont la situation et la grandeur varient avec la situation du point a. Démontrer qu'il existe sur le plan deux points d'où l'on voit ces segments variables sous un angle constant; et que, si l'on déplace les points M et N, les segments mn pourront être vus encore, soit sous le même angle que précédemment, soit sous un nouvel angle, selon les situations nouvelles de M et N; mais que c'est toujours aux mêmes points du plan qu'il faudra se placer pour les voir sous un angle constant.

(TRANSON, N. A., **1043**.)

(*Faure*, **72**, 81.)

315. Les données étant les mêmes qu'à l'énoncé précédent,

lorsque la droite donnée est une directrice de la conique, les points en question sont le foyer correspondant et son symétrique. (*Voir* N. A., **58**, 31, 179.) (TRANSON, N. A., **1043**.)

(*Faure*, **72**, 81.)

***316**. Trois points l, m, n étant pris sur une conique, on construit par rapport à un point quelconque f les cercles adjoint aux trois systèmes de droites lm, ln; ml, mn; nl, nm [1], ainsi que le cercle orthogonal à ces trois cercles. Si l'on désigne par α, β les demi-axes principaux de la conique, par g le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur sa polaire,

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{I_f}{fg^2}\left(1-\frac{\pi_g}{\pi_f}\right),$$

π_g, π_f étant les puissances des points g, f par rapport au cercle orthogonal, I_f l'indice du point f par rapport à la conique.

Examen du cas où le point f coïncide avec le centre de la conique. (FAURE, N. A., **1149**.)

317. Si

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\alpha\gamma+2h\alpha\beta=0$$

est l'équation d'une conique, et si A, B, C sont les angles que l'un des axes de la courbe fait avec les côtés du triangle de référence, on a

$$a\sin 2A+b\sin 2B+c\sin 2C \\ +2f\sin(B+C)+2g\sin(C+A)+2h\sin(A+B)=0.$$

(COMBIER, N. A., **1217**.)

(*Genese*, **77**, 45.)

318. Dans tous les triangles circonscrits à une conique donnée, et tels que les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés, le rapport d'une hauteur au diamètre conjugué de celui qui passe par son pied sur la conique est constant.

(POUJADE, N. A., **1243**.)

(*Pisani*, **78**, 229.)

---

[1] *Voir* N. A., **72**, 444.

319. Soient a, b, c, d quatre points d'une conique (S), et m un point quelconque; si l'on mène les droites ma, mb, mc, md, qui rencontrent de nouveau la conique (S) en des points a', b', c', d', respectivement, les deux coniques (m, a, b, c, d), (m', a', b', c', d') auront la même tangente au point m.

(GENTY, N. A., **1344**.)

(*Laudiero*, **81**, 179.)

320. A un triangle ABC on circonscrit une conique de centre (x, y, z). On sait que les droites qui joignent chaque sommet du triangle au pôle du côté opposé se coupent en un même point (x', y', z'). Démontrer qu'il y a réciprocité entre les points (x, y, z), (x', y', z') et que cette réciprocité est définie par les relations

$$\frac{yz'+zy'}{a}=\frac{zx'+xz'}{b}=\frac{xy'+yx'}{c},$$

où a, b, c sont les côtés de ABC. (CESARO, N. A., **1487**.)

(*Richard*, **84**, 490.)

321. D étant la perpendiculaire élevée sur l'axe focal d'une conique par l'un des points de cet axe d'où la conique est vue sous un angle droit, et P désignant le pôle de la droite D par rapport à la conique, si un cercle, ayant son centre sur cette conique et tangent à la droite D, coupe l'axe focal aux points M_1 et M_2, le rapport de PM_1 à PM_2 est constant. Que devient le théorème dans le cas de l'hyperbole équilatère?

(D'OCAGNE, N. A., **1566**.)

(*Brocard*, **90**, 157, 558.)

UNE CONIQUE EN GÉNÉRAL. — PROBLÈMES.

322. Quel est le plus grand angle que l'on puisse inscrire dans un segment donné d'une courbe du second degré?

(N. A., **16**.)

(*Breton de Champ*, **48**, 220.)

323. On donne cinq points d'une courbe du second degré, et une droite située sur le plan des cinq points donnés : déterminer les points de rencontre de la courbe et de la droite. (N. A., **18**.)

(*Poudra, Brocard,* **55**, 217; **77**, 142.)

324. Étant donnés une conique et un diamètre, trouver sur ce diamètre un point tel qu'en menant par ce point une parallèle à une droite donnée, les deux segments de la corde ou de la sécante soient dans un rapport donné. (N. A., **66**.)

(*Marqfoy,* **50**, 188.)

325. Inscrire dans un arc de section conique trois cordes consécutives formant trois segments équivalents.

(Chasles, N. A., **308**.)

(*Combescure,* **56**, 46.)

326. On donne sur un plan : 1° une conique S; 2° cinq points fixes a, b, c, d, P, dont l'un, a, est pris sur le périmètre de la conique. On propose de mener par le point P une transversale qui coupe la conique en deux points (réels ou imaginaires) ε, φ situés avec les quatre a, b, c, d, sur une même conique. Démontrer qu'il existe, en général, deux solutions.

(De Jonquières, N. A., **317**.)

(*Cremona*, **61**, 342; **63**, 300, 422.)

327. Dans un segment d'une conique quelconque, inscrire le trapèze maximum, la corde qui limite le segment devant être une des bases du trapèze. (Gabriel-Marie, N. A., **1301**.)

(*Lez*, **79**, 379.)

328. En chaque point M d'une conique, on mène un diamètre et la normale MA. Trouver l'intersection de ce diamètre et de la tangente à l'autre extrémité A de la corde normale.

(Brocard, N. C., **323**, M., **259**.)

(*Falisse,* M., **86**, 87.)

329. D'un point P (x, y), on mène à une conique deux tan-

gentes PM, PN. Trouver l'aire du quadrilatère FMPN, F étant un foyer. (FARISANO, M., 467.)

(*Déprez*, **87**, 256.)

*330. Déterminer tous les triangles équilatéraux T que l'on peut inscrire dans une conique. Dans quel cas les cercles circonscrits aux triangles T passent-ils par un point fixe? Dans quel cas passent-ils par deux points fixes? (LAGUERRE, J. S., 143.)

331. Construire un cercle tangent à une droite donnée et bitangent à une conique donnée. (TISSOT, J. S., 334.)

DEUX CONIQUES.

Deux ellipses.

332. Soient les équations de deux ellipses rapportées aux mêmes axes

$$(ax+by)^2+(a'x+b'y)^2=c^2,$$
$$(ax+a'y)^2+(bx+b'y)^2=c^2;$$

les aires des ellipses sont égales et, si les mêmes axes sont rectangulaires, les ellipses sont égales. (JACOBI, N. A., 125.)

(*Mention*, **46**, 533.)

333. Soient P, P' deux points appartenant respectivement à deux ellipses homofocales, tels que les tangentes qu'on mène à ces courbes, en P et P', se coupent à angles droits; en désignant par I le point de leur intersection, et par C le centre commun des ellipses, la droite CI divisera en parties égales la droite PP'.

(STREBOR, N. A., 201.)

(*Harel*, **49**, 206, 248.)

334. Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation d'une ellipse (coordonnées rectangulaires); par un point de sa développée on peut mener trois normales à l'ellipse, dont deux ne sont pas tangentes à la développée : la corde qui réunit les pieds de ces deux normales est normale à l'ellipse qui a pour équation

$$\left(\frac{c^2x}{ab^2}\right)^2+\left(\frac{c^2y}{ba^2}\right)^2=1. \quad \text{(Desboves, N. A., 550.)}$$

(*Dyrion*, **64**, 320.)

335. Deux ellipses homofocales sont l'une *inscrite* à un triangle et l'autre *circonscrite* au même triangle; on a la relation suivante entre les demi-grands axes et l'excentricité

$$\alpha^8-4\alpha^6a^2+6\alpha^4a^2c^2-4\alpha^2a^2c^4+a^4c^4=0 \text{ [1]}.$$

(Mention, N. A., **570.**)

(*Kessler, Schnée*, **61**, 289, 433.)

336. Une ellipse E étant donnée, décrire une autre ellipse E′, homothétique à la première, et telle, que si d'un point A pris arbitrairement sur E on conduit à E′ deux tangentes AM, AN, rencontrant E en des points B, C, la droite BC qui unit ces deux points d'intersection soit aussi tangente à l'ellipse E′.

Cette condition étant supposée remplie, démontrer que l'aire du triangle ABC est une quantité invariable, et qu'il en est de même de la somme des distances des trois sommets A, B, C de ce triangle à l'un des foyers de l'ellipse E donnée. (N. A., **712.**)

(*Grassat*, **65**, 80, 84.)

337. Construisons deux ellipses P et P′ telles que les demi-axes de la première coïncident en direction avec ceux de la seconde, mais soient respectivement proportionnels à leurs carrés :

1° Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres quelconques D_1 et D_2 de l'ellipse P vaut le parallélogramme

[1] a désigne le demi grand axe de l'ellipse intérieure et α celui de l'ellipse extérieure.

construit sur les demi-axes de cette ellipse assemblés sous l'angle ζ que forment entre eux les conjugués respectifs de D_1 et D_2 dans l'ellipse P';

2° Lorsque les diamètres D_1 et D_2 sont conjugués dans l'ellipse P, leurs conjugués respectifs dans l'ellipse P' se coupent à angle droit;

3° Le secteur elliptique compris entre deux demi-diamètres D_1 et D_2 dans l'ellipse P est proportionnel à l'angle ζ ou à la courbure de l'arc qu'ils interceptent sur l'ellipse P';

4° Lorsqu'un point décrit une ellipse P par l'action d'une force dirigée vers son centre, le rayon vecteur conjugué, par rapport à l'ellipse P', de celui qui passe par le point mobile, tourne autour du centre d'un mouvement uniforme;

5° Les perpendiculaires abaissées des extrémités de deux diamètres quelconques D_1 et D_2 de l'ellipse P sur les directions qui leur sont réciproquement conjuguées dans l'ellipse P' sont égales entre elles;

6° Comment ces énoncés se modifient-ils pour l'hyperbole?

(Gilbert, N. A., 875.)

(*Pellet,* **69**, 87.)

338. Imaginons deux ellipses concentriques, l'une intérieure et l'autre extérieure, dont les axes ont les mêmes directions. Cela posé, quelles relations doivent exister entre les demi-axes de ces deux ellipses pour que la courbe *polaire réciproque* de l'une d'elles par rapport à l'autre soit un cercle de rayon donné?

(Harkema, N. A., 983.)

(*Morel,* **71**, 46.)

339. Si deux ellipses de même centre et de mêmes axes ont une aire égale, les angles excentriques au point commun sont complémentaires. Considérer le point limite où les ellipses approchent de la similitude; trouver le lieu du point limite d'intersection. (Witworth, N. A., 1018.)

(*Moret-Blanc,* **74**, 201, 293.)

340. Deux ellipses sont concentriques; on leur mène une tan-

gente commune, et l'on joint au centre les points de contact; ces deux droites et les cordes communes qui passent par le centre forment un faisceau harmonique.

(MANNHEIM, N. A., **1209**.)

(*Thuillier*, **76**, 555.)

341. Étant données deux ellipses semblables, semblablement placées et ayant leurs grands axes ou leurs petits axes situés sur une même ligne droite, par l'un des centres de similitude, on mène une transversale qui coupe les deux ellipses en quatre points. On mène, en ces points, des tangentes aux deux ellipses, et l'on propose de démontrer que ces quatre tangentes forment un parallélogramme dont l'une des diagonales passe par un point fixe et dont l'autre coïncide avec une droite fixe, perpendiculaire à l'axe de similitude. (ESCARY, N. C., **464**.)

(*Jamet*, **79**, 173.)

342. Étant données deux ellipses homofocales, par un point P de leur plan, on mène à l'une d'elles deux tangentes; A et B d'une part, C et D d'autre part étant les points où ces tangentes rencontrent la seconde ellipse, établir la relation

$$\frac{1}{PA} \pm \frac{1}{PB} = \frac{1}{PC} \pm \frac{1}{PD};$$

trouver à quelles positions du point P conviennent respectivement les signes + et —. (J. M., **331**.)

(*Du Motel*, **81**, 563.)

343. Les cordes d'une ellipse des extrémités desquelles partent deux normales se coupant sur la développée sont normales à une ellipse semblable à la première. (L. LÉVY, J. S., **121**.)

(*Martin*, **88**, 263.)

344. On donne deux ellipses concentriques et homothétiques. En un point quelconque M de l'ellipse intérieure, on mène la

normale qui rencontre les axes en P, Q; on trace aussi la tangente qui coupe l'ellipse extérieure en R, S.

Démontrer que les angles PQR, PSQ sont invariables.

(NEUBERG, J. S., **272**.)

(*Leinekugel*, **91**, 166.)

Une ellipse, une hyperbole.

345. Si d'un point donné dans le plan d'une ellipse, on mène quatre normales, les pieds de ces normales, le point donné et le centre de l'ellipse sont sur une même hyperbole équilatère, dont les asymptotes ont mêmes directions que les axes principaux de l'ellipse; le point de moyenne distance des pieds des normales, les centres de l'hyperbole et de l'ellipse sont sur une même droite conjuguée du diamètre qui fait avec le petit axe un angle égal à celui que fait avec le grand axe le diamètre qui passe par le point donné. (N. A., **163**.)

(*Mention*, **47**, 370.)

346. A, B, C, D étant quatre points pris sur une ellipse, tels que les normales en ces points convergent vers le même point; $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ étant l'équation de l'ellipse, les cordes AB, CD sont conjuguées relativement à l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2;$$

axes rectangulaires. (N. A. **164**.)

(*Mention*, **47**, 370.)

347. Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales. (MANNHEIM, N. A., **451**.)

(*Terquem*, **58**, 432.)

348. Soit V un des foyers d'une hyperbole équilatère quelconque tangente à une ellipse donnée et concentrique avec elle. En supposant que le point de contact de ces deux courbes varie,

le rectangle FVF′V, F, F′ étant les foyers de l'ellipse, conservera une valeur constante. (Strebor, N. A., 582.)

(*Jaufroid*, **61**, 294; **67**, 424.)

349. On donne une ellipse et une hyperbole homofocales dont O est le centre commun. Par un point quelconque P de l'hyperbole, on mène des droites parallèles aux normales à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole; soient H et K les points où ces droites coupent l'hyperbole et I le point milieu du segment HK : démontrer que les deux droites OP et OI sont également inclinées sur le grand axe, et que le rapport de OP à OI est constant. (Laguerre, N. A., 906.)

(*Millasseau*, **69**, 421.)

350. Mêmes données qu'en l'énoncé précédent. Par les trois points P, H et K on fait passer un cercle, et sur ce cercle on prend le point P′, conjugué harmonique du point P relativement aux deux points H et K : démontrer que la perpendiculaire élevée sur le milieu de PP′ est la polaire du point P relativement à l'ellipse. (Laguerre, N. A., 907.)

(*Willière*, **69**, 535.)

351. Une ellipse a son centre sur une hyperbole donnée et touche les asymptotes de cette hyperbole; démontrer que la corde des contacts, correspondant au maximum de l'aire de l'ellipse, est tangente à une hyperbole semblable à l'hyperbole donnée. (Besant, N. A., 1192.)

(*Segue*, **76**, 234, 326.)

352. Si du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole on décrit un cercle passant par les foyers, ce cercle coupera l'axe perpendiculaire à l'axe focal en deux points tels, que la somme des carrés de leurs distances à une tangente quelconque est constamment égale à la moitié du carré de l'axe focal.

(Lez, N. A., 1216.)

(*Sondat*, **76**, 559.)

353. Une ellipse et une hyperbole ont mêmes axes AA_1, BB_1; par un des sommets réels A passe une sécante AMM′; et les tangentes en M et en M′ se rencontrent en T : on demande de construire les deux courbes, connaissant les points A, M, T.

(Laisant, N. A., 1370.)

(*Goffart*, **82**, 424.)

354. Une hyperbole est tangente aux axes d'une ellipse, et les asymptotes de l'hyperbole sont tangentes à l'ellipse; prouver que le centre de l'hyperbole est sur l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse. (Wolstenholme, N. A., 1457.)

(**84**, 392.)

355. Une ellipse et une hyperbole sont telles que les asymptotes de l'hyperbole sont deux diamètres conjugués de l'ellipse; prouver qu'en faisant un choix convenable d'axes de coordonnées, on pourra donner respectivement aux équations des deux courbes les formes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=m$$ (Wolstenholme, N. A., 1496.)

(*Goffart*, **84**, 541.)

***356.** Soient AA′, BB′ deux diamètres conjugués d'une ellipse; MM′ un diamètre quelconque : les pôles des quatre droites MA, MA′, M′B, M′B′ sont situés sur une hyperbole qui passe par le centre de l'ellipse et est tangente, en ce point, au diamètre MM′; le centre de cette courbe est situé sur l'ellipse, et ses asymptotes sont parallèles aux droites AA′, BB′ respectivement.

(Genty, N. A., 1547.)

357. L'ordonnée du point d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole homofocales rencontre les asymptotes sur la circonférence qui a pour diamètre le grand axe de l'ellipse.

(Jerabek, M., 315.)

(*Keelhoff*, **84**, 208.)

358. Toute hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux

axes d'une ellipse donnée rencontre celle-ci en quatre points tels que les six circonférences, décrites par deux de ces points et par le point de concours des tangentes menées à l'ellipse en ces points, se coupent en un même point. (NEUBERG, M., **354**.)

(*Neuberg,* **87**, 48.)

Deux hyperboles.

359. En projetant *cylindriquement* deux hyperboles *conjuguées* sur un plan, les projections sont des hyperboles *conjuguées;* mais que deviennent les hyperboles conjuguées en les projetant *coniquement* sur un plan? (N. A., **140**.)

(*Brocard,* **78**, 429.)

360. Étant données deux hyperboles équilatères, trois de leurs points d'intersection et les deux points symétriques du quatrième par rapport aux centres des deux hyperboles sont situés sur un même cercle. (PELLET, N. A., **1223**.)

(*Jamet,* **77**, 236, 238.)

361. L'angle de deux hyperboles équilatères, concentriques, est double de l'angle de leurs asymptotes.

(CESARO, N. A., **1434**; N. C., **552**.)

(*Giat,* N. A., **83**, 332; *Cesaro*, N. C., **80**, 286.)

362. Par un des points d'intersection A de deux hyperboles équilatères de même centre O, on mène une sécante qui rencontre les deux courbes en B, B'. Soient C, C' les projections de ces points sur les tangentes en A à la courbe correspondante. Démontrer que l'angle COC' est quadruple de l'angle des asymptotes.

(FAUQUEMBERGUE, N. A., **1461**; N. C., **581**; M., **468**; J. M., **342**.)

(N. A., **85**, 434; *Déprez,* M., **87**, 163; *Boulogne,* J. S., **82**, 45.)

363. Par un point P du plan d'un triangle passent deux hyper-

boles équilatères, l'une circonscrite, l'autre conjuguée au triangle. Déterminer en coordonnées trilinéaires les équations de ces hyperboles et l'équation du cercle qui passe par les trois points d'intersection de ces deux hyperboles, autres que le point P. (E. LUCAS, M., 692.)

Kluyver, **91**, 100.)

Une parabole et une autre conique, ou deux paraboles.

364. On donne les deux paraboles $y^2 = 2c(x \pm c)$; une tangente à l'une de ces paraboles rencontre la seconde parabole aux points P, Q; sur PQ comme diamètre on décrit un cercle qui rencontre la seconde parabole en deux nouveaux points R, S; prouver que la droite RS est tangente à la seconde parabole.

(WOLSTENHOLME, N. A., 1464.)

(*Clément*, **84**, 487.)

365. On donne une parabole et une autre conique, et l'on mène les quatre tangentes communes qui touchent la conique en A, A′, A″, A‴. Par le foyer F de la parabole, on mène un cercle touchant la conique en A, et la rencontrant en B et C, etc. Démontrer que les quatre droites BC, B′C′, ... concourent en un même point. (WEILL, N. A., 1517.)

366. Démontrer que, si une parabole P touche les diamètres conjugués égaux d'une ellipse E, les cordes communes à l'ellipse et aux cercles osculateurs à cette courbe aux points de contact des tangentes communes à P et à E passent par un même point; la polaire de ce point par rapport à l'ellipse est tangente à la parabole. (LEMAIRE, N. A., 1604.)

(*Barisien*, **92**, 2*.)

367. On donne une parabole (P) et une de ses tangentes *t*, dont le point de contact est A. Par les différents points de *t*, on élève des perpendiculaires aux tangentes à (P) menées par ces

points, autres que t. Ces tangentes enveloppent une seconde parabole (P′). La parabole (P′) est tangente à t en un point B. Les paraboles (P) et (P′) ont le même foyer, leurs axes sont rectangulaires. La directrice de (P) passe par le point B, la directrice de (P′) passe par le point A. (DEWULF, M., 28.)

(*Brocard,* **81**, 113.)

368. Dans quel rapport la parabole ayant pour équation

$$y^2 = 2px$$

partage-t-elle l'ellipse représentée par

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2? \quad \text{(M., 564.)}$$

(*Emmerich,* **88**, 126.)

369. Deux paraboles variables sont assujetties : 1° à avoir leurs axes parallèles et à une distance donnée l'un de l'autre; 2° à se couper orthogonalement en deux points. Trouver l'aire minima comprise entre les deux courbes. (J. S., 2.)

(*Kœhler,* **83**, 89.)

370. On considère deux paraboles P, P′ qui, ayant même sommet O, se coupent orthogonalement en ce point. Autour du point O on fait tourner deux droites rectangulaires et l'on obtient ainsi : sur P, deux points a et b; sur P′, deux autres points a' et b'. Si l'on prend trois des quatre points a, b, a', b', pour former un triangle, le quatrième est l'orthocentre de ce triangle. (BEAUREPAIRE, J. S., 213.)

(*Delbourg,* **90**, 190.)

371. On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point fixe A; autour de A, on fait tourner deux droites rectangulaires Δ, Δ'. Soit P une parabole ayant pour axe Δ, pour sommet A et passant par O; soit P′ une seconde parabole passant par O, ayant A′ pour sommet et Δ' pour axe.

Ces deux paraboles, abstraction faite de A et de O, admettent encore deux points communs; ceux-ci sont imaginaires, mais

appartiennent à une droite réelle δ. Démontrer que δ passe par un point fixe. (De Longchamps, J. S., 243.)

(*Leinekugel*, **91**, 46.)

372. En un point M d'une conique, on construit la parabole osculatrice et l'on prend le symétrique P du foyer de cette parabole par rapport à la tangente en M : démontrer que les points P et M sont réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

(Laguerre, N. A., 1232.)

(*Lez, Pellissier*, **78**, 130, 225.)

Deux coniques en général.

373. Étant donnés dans le même plan, deux cercles et un point fixe, mener deux tangentes parallèles, chacune à un cercle; de telle sorte que le rapport des distances du point fixe aux deux parallèles soit donné. Étendre le problème à deux coniques quelconques. (N. A., 115.)

(*Drouets*, **46**, 548.)

374. ABC est un triangle donné; F un point *fixe* dans le plan du triangle; une droite *variable* AD passe par A et rencontre la base BC en D, point *variable*. Construisons une conique ayant pour foyer le point F et touchant les trois côtés du triangle ABD; soit E le point de contact sur AD; et encore une seconde conique de même foyer F et touchant les trois côtés du triangle ACD; soit E′ le point de contact sur AD; l'angle EFE′ est constant.

(Stubbs, N. A., 279.)

(*Méray*, **57**, 240; **58**, 347.)

375. Étant données deux coniques homofocales et un point quelconque M entre les deux courbes; si l'on mène MT, MT′ tangentes à la courbe intérieure en T et en T′ et rencontrant la courbe extérieure en A et B, en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MC}+\frac{1}{MD}.$$

Si la courbe intérieure devient la droite terminée par les deux foyers, on retombe sur la question **348** (*voir* ci-dessus, énoncé n° **235**). (M. ROBERTS, N. A., **357**.)

(*Sauze*, **57**, 243.)

376. Étant données deux coniques ayant pour foyers communs les points F et F′, on mène arbitrairement par l'un de ces foyers F′ une droite rencontrant chaque conique en deux points ; par chacun de ces quatre points on mène une tangente à la conique sur laquelle est ce point ; 1° ces quatre droites sont tangentes à une parabole ayant pour foyer le second foyer F et pour directrice la droite menée arbitrairement par F′ ; 2° cette parabole est tangente à l'axe des coniques qui contient les foyers imaginaires ; 3° une tangente commune à l'une des coniques et à la parabole est vue du foyer sous un angle droit.

(FAURE, N. A., **358**.)

(*Faure*, **57**, 140 ; **61**, 30.)

377. On sait que si d'un point M pris sur le plan d'une conique C, ayant pour foyers F, F′, on mène à cette courbe deux tangentes MT, MT′ et les deux droites MF, MF′, les angles TMF, T′MF′ sont égaux, de sorte que, si le point M est pris sur une autre conique C′ ayant les mêmes foyers F, F′ que C, la bissectrice de l'angle des tangentes, ou de son adjacent, est tangente à la courbe C′ au point M. Prouver que toute courbe C″, qui par rapport à la conique C jouit de la même propriété, est une conique ayant les mêmes foyers F et F′. (N. A., **635**.)

(*Hermile de la Phidelne*, **63**, 420.)

378. Soient C et C′ deux coniques homofocales, M un point pris sur la première, et MN la normale menée au point M et terminée à l'axe focal. La grandeur de la projection de MN sur la tangente à C′ menée par le point M est indépendante de la position du point M sur la conique C. (GROS, N. A., **704**.)

(*Smet-Jamar*, **64**, 391.)

379. Si les six points P, Q, A, B, C, D sont sur une même conique, les points d'intersection des droites PA, QB; PB, QA; PC, QD; PD, QC sont sur une conique qui passe par les points P et Q. (Cayley, N. A., **733**.)

(Mlle *Lechaucey*, **65**, 372.)

380. Étant donnés deux cercles, si l'on prend les polaires de ces cercles par rapport à un cercle quelconque, on obtient deux coniques; les cercles qui ont pour diamètres les axes focaux de ces coniques se coupent sous le même angle que les cercles donnés. (Faure, N. A., **886**.)

(*Endrès*, **70**, 236.)

381. Si par le foyer commun F de deux coniques on mène une droite quelconque, et qu'aux points où elle coupe les deux coniques on mène les tangentes aux coniques en ces points, ces quatre tangentes formeront un quadrilatère dont les diagonales seront les cordes communes aux deux coniques.

La droite qui joint les foyers non communs des deux coniques jouit de la même propriété.

Si l'une des deux coniques ci-dessus tourne autour du foyer commun dans son plan, le lieu des points de concours des tangentes communes aux deux coniques est un cercle. Si les deux coniques sont telles que dans une de leurs positions les tangentes communes soient parallèles, elles le seront dans toutes : montrer que la condition de parallélisme de ces tangentes communes est l'égalité des axes non focaux.

(Lemoine, N. A., **1086**, **1094**.)

(*Kœhler*, **73**, 187, 232; *Jamet*, **73**, 41.)

***382.** On donne deux coniques A, B et un point S, dans un plan. Par ce dernier point on tire une ligne quelconque, et l'on prend son pôle a par rapport à la conique A. On joint Sa et l'on prend son pôle b par rapport à B; on tire Sb et l'on prend son

pôle a_1 par rapport à A, et ainsi de suite indéfiniment. Démontrer que :

1° Quatre droites consécutives quelconques des faisceaux S, a, a_1, a_2, ... et S, b, b_1, b_2, ... ont des rapports anharmoniques constants;

2° Donner l'expression d'un de ces rapports;

3° Si ce procédé est épuisé à la cinquième ligne, en d'autres termes, si Sb_1 coïncide avec la première ligne arbitraire issue du point S, les quatre tangentes menées par S aux deux coniques forment un faisceau harmonique. (DE POLIGNAC, N. A., **1309**.)

383. On donne une conique (S), un point fixe A sur cette conique, une droite (D) et un point fixe a sur cette droite.

Une conique osculatrice à (S) au point A, et passant au point a, coupe de nouveau la conique (S) et la droite (D) en des points b et c, respectivement; démontrer que la droite bc coupe (S) en un point fixe f. (GENTY, N. A., **1331**.)

(*Moret-Blanc*, **81**, 372.)

384. Si, par un point quelconque M de la sécante commune à deux coniques homothétiques, on mène une droite quelconque coupant la première en A et B, la seconde en A′ et B′, les produits $MA \times MB$ et $MA' \times MB'$ seront égaux.

(BARBARIN, N. A., **1413**.)

(*Fauquembergue,* **83**, 324.)

385. Soient $S = 0$, $S' = 0$ les équations de deux coniques quelconques; Δ, Δ' les discriminants respectifs de S, S′; enfin F le covariant des formes S, S′ : l'équation qui a pour racines les rapports anharmoniques de quatre droites passant par un point et touchant les deux coniques sera

$$x^2 - 2\,\frac{F^2 + 4\Delta\Delta' SS'}{F^2 - 4\Delta\Delta' SS'}\,x + 1 = 0. \quad \text{(Ed. Weyr, N. C., 244.)}$$

386. Si l'on a la relation

$$(fl)^{\frac{1}{3}} + (gm)^{\frac{1}{3}} + (hn)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

les coniques

$$fyz + gzx + hxy = 0,$$
$$\sqrt{lx} + \sqrt{my} + \sqrt{nz} = 0$$

sont tangentes. Déterminer leur point de contact. (J. M., 226.)

(*Le Pont*, **81**, 88.)

***387**. On décrit une conique osculatrice à une conique donnée en un point P, et passant par les foyers F et F′. Démontrer que les tangentes en F et F′ se coupent au centre du cercle osculateur en P. (Kœhler, J. S., 74.)

388. Une conique étant définie par les points A, B, C, D, E et une autre conique étant définie par les points A, B, F, G, H, construire par la règle et le compas les autres points d'intersection de ces deux coniques. (Amigues, J. S., 167.)

(*Berthon*, **89**, 213.)

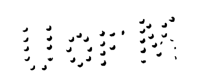
389. La tangente et la normale, en chaque point d'une conique à centre, sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère qui passe par ce point, par le point diamétralement opposé et par les deux foyers. Démontrer géométriquement cette proposition. (Tissot, J. S., 281.)

(*Brocard*, **91**, 286.)

PLUS DE DEUX CONIQUES

Trois coniques.

390. Étant donné un triangle plan, soient trois paraboles, ayant même foyer, dont chacune est touchée par deux côtés du triangle; si l'on mène à la première de ces paraboles la tangente qui coupe perpendiculairement le troisième côté du triangle, et, de même pour les deux autres, les trois droites qu'on obtient ainsi seront



toutes tangentes à la même parabole, homofocale avec les trois autres. (STREBOR, N. A., 207.)

(*Laroche*, *Brisse*, **49**, 297; **71**, 36.)

391. $a, \alpha; b, \beta; c, \gamma$ étant les foyers de trois coniques inscrites au même quadrilatère, on a cette relation

$$\frac{ac.\alpha c}{bc.\beta c} = \frac{a\gamma.\alpha\gamma}{b\gamma.\beta\gamma}.$$ (STEINER, N. A., 272.)

(*Faure*, **55**, 97.)

392. Les droites qui dans deux ellipses *confocales* joignent deux points correspondants sont normales à une troisième ellipse qui bissecte ces normales.

Observation. — Deux points sont *correspondants* lorsque les coordonnées de ces points sont respectivement proportionnelles aux axes sur lesquels sont rapportées ces coordonnées. (HEILERMANN, N. A., 519.)

(*Prat*, **60**, 238.)

***393.** Trois coniques étant données dans un même plan, il y a vingt points d'où elles sont vues sous le même angle ou sous des angles supplémentaires. (FAURE, N. A., 585.)

394. Étant donnés trois triangles circonscrits à une même conique, on peut, en considérant ces triangles deux à deux, décrire trois coniques contenant chacune six sommets de deux des triangles proposés; démontrer que ces trois coniques passent par un même point. (SCHRŒTER, N. A., 677.)

(*Cremona*, **64**, 30, 33.)

395. Si trois coniques ont un point commun, les neuf côtés des trois triangles, qui sont formés par les autres points d'intersection des coniques, considérées deux à deux, touchent une même conique. (SCHRŒTER, N. A., 678.)

(*Cremona*, **64**, 30, 33.)



396. Trois coniques quelconques ont généralement, deux à deux, six cordes communes; démontrer que les dix-huit droites qui en résultent touchent une même courbe de la troisième classe. (SCHRŒTER, N. A., **679**.)

(*Cremona*, **64**, 30, 33.)

397. Si trois coniques ont deux à deux un foyer commun, leurs cordes communes concourent trois à trois.

Cas particuliers. (LEMOINE, N. A., **1069**.)

(*Kœhler*, **74**, 487.) [1].

398. Par les sommets d'un triangle pris deux à deux, on fait passer trois paraboles ayant un point de contact commun. Les diamètres de ces paraboles qui passent par ce point rencontrent les côtés correspondants du triangle en des points tels, que les droites qui les joignent aux sommets opposés concourent en un point. (FOURET, N. A., **1109**.) [2].

(*Poujade, Bourguet, Fouret*, **73**, 190, 231; **74**, 496; **75**, 231.)

399. Démontrer que toute droite passant par le sommet commun aux trois coniques représentées par les équations

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$2px^2 + \alpha(y^2 - 2px) = 0,$$
$$2px^2 - \alpha(y^2 - 2px) = 0$$

les coupe en trois autres points qui forment avec le sommet une proportion harmonique, quelle que soit la valeur de α.

(GUILLET, N. A., **1345**.)

(*Goffart*, **81**, 427.)

400. Considérons un parallélogramme ABCD dans un plan, et

---

(1) Généralisation.

(2) Cet énoncé ne paraît pas exact. Nous l'avons maintenu, parce qu'il a donné naissance à un très intéressant échange d'observations entre MM. Poujade, Bourguet et Fouret, observations qu'on trouvera dans les années et aux pages indiquées des N. A.

une droite quelconque MM′ de ce plan. Il existe deux coniques circonscrites au parallélogramme et tangentes à la droite MM′. Soit O le milieu du segment déterminé sur cette droite par les deux points de contact. Il existe en outre une conique inscrite dans le parallélogramme et tangente à la droite *mm′*. Soit O′ son point de contact avec cette droite. Les points O et O′ coïncident. (ANDOYER, N. A., **1526**.)

(*Droz*, **87**, 580.)

401. Soient A, B, C, D quatre points quelconques d'un même plan; Dα, Dβ, Dγ les perpendiculaires abaissées de D, respectivement, sur les droites BC, CA, AB. Démontrer que les trois paraboles, qui ont pour foyers les points A, B, C et pour tangentes aux sommets les droites Dα, Dβ, Dγ, sont inscrites à un même triangle. (NEUBERG, N. C., **112**.)

(*Neuberg,* **78**, 380.)

402. Dans un triangle formé par trois arcs d'hyperboles équilatères ayant un même centre, ou par trois arcs de paraboles ayant même foyer, la somme des trois angles vaut deux droits. (BROCARD, N. C., **173**.)

(*Dewulf,* **78**, 112, 139.)

***403**. Par un point P pris dans le plan d'une conique S, on mène quatre sécantes quelconques rencontrant cette courbe aux points (A, A′), (B, B′), (C, C′), (D, D′). Les deux coniques PABCD, PA′B′C′D′ se touchent au point P et se rencontrent en deux autres points, situés sur la polaire de P, par rapport à S. (NEUBERG, N. C., **425**.) (¹).

404. On donne trois paraboles P, P′, P″, de même axe et de même sommet, dont les paramètres sont proportionnels aux

(¹) *Voir* **78**, 395.

nombres 72, 45, 40. Si, par un point quelconque M de P, on mène la tangente à P'', elle rencontre P' en un point qui est le centre de gravité du segment parabolique OM.

(CESARO, N. C., 461.)

(*Cauret,* **79**, 169, 224, 247.)

*405. Trois coniques C_1, C_2, C_3 ont même sommet O et même axe OA. Par un point quelconque M de C, on mène une tangente à C_3 : cette tangente rencontre C_2 en un point I.

Établir les relations qui doivent exister entre les paramètres des trois coniques pour que le point I soit le centre de gravité du segment OM. (CAURET, N. C., 531.)

406. On considère trois paraboles, ayant pour foyer commun le centre du cercle inscrit au triangle des sommets : 1° La tangente commune à deux paraboles est perpendiculaire à l'axe de la troisième et contient le centre d'un cercle exinscrit au triangle des sommets. 2° Les points de contact d'une parabole avec deux tangentes communes, sont en ligne droite avec le point où la troisième tangente rencontre l'axe. 3° Tout triangle inscrit au triangle des tangentes communes, et semblable à ce triangle, a chacun de ses côtés tangents à une parabole.

(CESARO, M., 419.)

(*Cesaro,* **85**, 129.)

407. Sur trois coniques bitangentes à deux cercles donnés, de manière que les centres de ces cercles ne se trouvent pas sur le même axe, deux au moins sont semblables entre elles.

(TISSOT, J. S., 324.)

Plusieurs coniques.

*408. Le nombre des coniques d'un système (μ_1, ν_1), qui sont osculatrices à des coniques d'un autre système (μ_2, ν_2), est égal à $3(\mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2.)$ (ZEUTHEN, N. A., 1107.)

*409. Combien de coniques d'un système ont un double contact avec des coniques d'un autre système?

(ZEUTHEN, N. A., 1108.)

*410. On sait que les cordes d'une conique qui sont vues d'un point C de la courbe sous un angle droit passent par un point fixe P; la polaire de ce point par rapport à la conique est une corde commune de cette courbe et du point C, considéré comme un cercle infiniment petit.

Cela posé, soient A et B deux points quelconques de cette polaire. Par les trois points A, B et C, on peut mener trois coniques ayant un contact du second ordre avec la conique donnée aux points L, M et N respectivement; les droites CL, CM et CN sont normales aux côtés d'un triangle équilatéral, et il en est de même des droites qui joignent le point C aux quatrièmes points de rencontre des trois coniques osculatrices deux à deux.

(GENTY, N. A., 1508.)

411. Étant donné un quadrilatère complet dont les six sommets opposés sont a, a_1, b, b_1, c, c_1, on peut former les quatre triangles

$$ab_1c_1,\quad bc_1a_1,\quad ca_1b_1,\quad abc.$$

Si l'on prend trois points en ligne droite

$$A,\quad B,\quad C,$$

les quatre coniques

$$(BCab_1c_1),\quad (BCbc_1a_1),\quad (BCca_1b_1),\quad (BCabc)$$

passent par un même point A_1;

$$(CAab_1c_1),\quad (CAbc_1a_1),\quad CAca_1b_1),\quad (CAabc)$$

passent par un même point B_1;

$$(ABab_1c_1),\quad (ABbc_1a_1),\quad (ABca_1b_1),\quad (ABabc)$$

passent par un même point C_1.

Les points A, B_1, C_1 sont en ligne droite; B, C_1, A_1 aussi; C, A_1, B_1 aussi, et les huit côtés des deux quadrilatères, dont

les sommets opposés sont a, a_1, b, b_1, c, c_1, et A, A_1, B, B_1, C, C_1, touchent une même conique. (SCHRŒTER, N. A., **1581**.)

(*Lemaire*, **91**, 18*.)

412. Les quatre coniques circonscrites à un triangle donné ABC, et dont le foyer est un point donné F, se coupent, deux à deux, en six nouveaux points D_{12}, D_{13}, ... Démontrer que chacune des trois coniques ayant pour foyer le point F, pour directrice l'un des côtés du triangle ABC, et passant par le sommet opposé de ce triangle, contient deux des points D.

(NEUBERG, N. C., **51**.)

(*Neuberg*, **76**, 356.)

413. On donne deux coniques S, S′ et un point A sur S. Démontrer qu'il n'existe que quatre coniques osculatrices à S en A et osculatrices aussi à S′. Déterminer les quatre points d'osculation de S′. (DEWULF, M., **415**.)

(*Servais*, **88**, 33.)

Systèmes d'une infinité de coniques.

414. Les axes des paraboles qui ont pour foyer un point donné et qui passent par deux autres points donnés sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole qui a pour foyers les deux derniers points et qui passe par le premier point. (DUPAIN, N. A., **764**.)

(*Roque*, **66**, 465.)

415. 1° Si les quatre normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux points homographiques des quatre points considérés situés sur des ellipses ayant même grand axe que la première.

2° Si les quatre normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux quatre points conjugués. De plus, les deux triangles formés par les diagonales des deux quadrilatères circonscrits à l'ellipse

aux pieds de deux groupes de normales ont même surface.

3° Considérons deux quadrilatères inscrit et circonscrit. Les normales aux quatre points, sommets du premier et points de contact du second, sont concourantes. La diagonale du quadrilatère circonscrit est conjuguée de la symétrique, par rapport à l'un des axes de l'ellipse, de la droite joignant les milieux des côtés du quadrilatère inscrit, qui sont les polaires des extrémités de la diagonale considérée. (SARTIAUX, N. A., **984**.)

(*Moret-Blanc*, **76**, 474.)

416. Parmi toutes les ellipses qui passent par quatre points, trouver celle dont l'aire est minimum. (DOUCET, N. A., **1067**.)

(*Gambey*, **73**, 475, 524.)

417. De toutes les ellipses inscrites dans un triangle donné ABC, celle dont la surface est la plus grande est équivalente au cercle inscrit dans un triangle équilatéral équivalent au triangle proposé.

Si du centre de cette ellipse on mène des droites aux centres des cercles inscrits dans les deux triangles équilatéraux construits sur l'un quelconque des trois côtés du triangle proposé, ces droites seront respectivement égales à la demi-somme et à la demi-différence des axes de l'ellipse, et les axes de l'ellipse seront dirigés suivant les bissectrices des angles formés par ces deux droites. (GERONO, N. A., **1100**.)

(*Gambey*, **73**, 139, 142.)

418. Les cercles concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement la somme et la différence de ses axes, interceptent, sur toute normale à l'ellipse, des segments dont deux sont toujours égaux. En donner l'expression.

(DE POLIGNAC, N. A., **1114**) ([1]).

(*Moret-Blanc*, **73**, 282.)

([1]) Cette question ne concerne qu'une seule ellipse. Elle a été néanmoins placée ici à cause de son étroite connexité avec les deux suivantes, du même auteur.

419. Montrer que l'on peut tracer une infinité d'ellipses concentriques et co-axiales à une ellipse donnée, jouissant deux à deux de la même propriété. Les axes de l'ellipse peuvent être considérés comme deux ellipses (non correspondantes) de la série. (DE POLIGNAC, N. A., **1115**.)

(*Moret-Blanc,* **73**, 282.)

420. Deux ellipses quelconques de la série interceptent, sur toute normale à l'ellipse donnée, deux segments dont le rapport est constant. (DE POLIGNAC, N. A., **1116**.)

(*Moret-Blanc,* **73**, 282.)

421. Les foyers de toutes les ellipses, qui ont leur cercle osculateur maximum commun en un point donné fixe, appartiennent à une même circonférence. (BESANT, N. A., **1191**.)

(Mlle *Lebœuf,* **76**, 232, 233.)

422. OA et OB étant deux droites fixes quelconques, on considère une ellipse variable, tangente à OA au point O, ayant une courbure constante en ce point et dont un foyer reste constamment sur OB. Démontrer que le grand axe de cette ellipse passe par un point fixe. (D'OCAGNE, N. A., **1482**.)

(*Moret-Blane,* **84**, 350; N. C., **79**, 8.)

423. Les coniques semblablement situées qui ont même cercle directeur sont inscrites au même carré. Démontrer aussi que, si deux telles coniques se coupent en M, les tangentes au point M font des angles égaux avec un côté du carré.

(GENESE, N. A., **1582**.)

424. Si l'on considère la série des coniques circonscrites à un quadrilatère fixe ABCD, chaque courbe de la série est déterminée par le rapport anharmonique des droites joignant un cinquième point aux sommets du quadrilatère.

Soient ρ, ρ', ρ'' ces rapports pour les coniques représentées par

$$f(x, y) = 0, \qquad F(x, y) = 0, \qquad f(x, y) + KF(x, y) = 0;$$

exprimer K en fonction de ρ, ρ', ρ''. (N. C., **10.**)

(*Neuberg*, **76**, 318.)

425. A une série de coniques homofocales, on tire d'un point fixe P les tangentes. 1° Les circonférences décrites par P et les deux points de contact passent par un point fixe. 2° Les coniques décrites par P, les deux points de contact et les deux foyers fixes passent par un point fixe. (ALLERSMA, M., **326.**)

(*Jamet,* **85**, 37.)

426. Les coniques passant par les sommets et le centre de gravité d'un triangle sont des hyperboles ayant pour asymptotes deux cordes supplémentaires de l'ellipse qui touche les côtés du triangle en leurs milieux. (STEINER, M., **523.**)

(*Blondeel,* **87**, 203.)

427. Étant donné un triangle équilatéral ABC, on considère toutes les paraboles qui passent par A, B et dont la directrice passe par C. Démontrer : 1° que le foyer décrit une inverse de conique; 2° que l'extrémité du diamètre mené par le milieu de AB décrit une circonférence. (JERABEK, M., **572.**)

(*Verniory,* **89**, 232.)

428. On considère une ellipse Γ_1; on imagine une seconde ellipse Γ_2 ayant deux sommets communs avec Γ_1 et admettant pour ses deux autres sommets les foyers de Γ_1. Soit Γ_3 une ellipse déduite de Γ_2, comme Γ_2 l'a été de Γ_1 et ainsi de suite.

On demande combien de ces coniques Γ seront, au début, allongées suivant l'axe OX; combien ensuite on trouvera de coniques allongées suivant OY; et ainsi de suite.

En désignant par a et b les axes de Γ_1, on posera $a^2 = pb^2$, et l'on distinguera trois cas, suivant que p désigne un nombre

entier, un nombre commensurable, ou enfin un nombre irrationnel de la forme $m + \sqrt{n}$, m et n étant commensurables. (De Longchamps, J. S., **172**.)

(*Moulet*, **90**, 18.)

429. On considère toutes les coniques passant par quatre points donnés, abstraction faite des systèmes de deux droites. Quelles sont les droites dont chacune a ses pôles, par rapport à ces coniques, sur une même ligne droite. (Tissot, J. S., **294**.)

430. Les coniques tangentes à une même hyperbole, et telles que, pour chacune d'elles, les asymptotes de cette hyperbole forment un système de diamètres conjugués, sont des ellipses. Ces ellipses sont équivalentes. Elles interceptent, sur deux diamètres conjugués quelconques de l'hyperbole, des longueurs proportionnelles. Démonstrations géométriques. (Tissot, J. S., **301**.)

(*Sollertinsky*, **92**, 23.)

CONSTRUCTION OU DÉTERMINATION D'UNE CONIQUE.

Une ellipse ou une hyperbole.

431. On donne le centre d'une ellipse, un point de la courbe et le centre du cercle osculateur en ce point; déterminer les axes de l'ellipse. (N. A., **1036**.)

(*Callandreau*, **71**, 457.)

432. On donne, en position, l'axe focal d'une ellipse, un point de la courbe et le centre du cercle osculateur en ce point; déterminer les axes de l'ellipse. (N. A., **1037**.)

(*Callandreau*, **71**, 458.)

433. Construire les axes d'une hyperbole équilatère dont on donne quatre points. (N. A., **19**.)

(*Vidal,* **43**, 43.)

434. Décrire une hyperbole équilatère tangente à quatre droites données. (N. A., **20**.)

(*Roux,* **41**, 422.)

435. Construire une hyperbole équilatère, connaissant le centre, une tangente et un point. (Mention, N. A., **717**, **1120**.)

(*Pabon,* **65**, 320; **74**, 206.)

436. Construire une hyperbole, étant donnés l'axe transverse AA′ et un point M de la courbe. (Levat, N. A., **1162**.)

(*Garreta,* **75**, 239.)

437. Un point F est donné par ses coordonnées α, β, relativement à deux axes OX, OY, comprenant entre eux un angle θ : on demande de trouver l'équation de l'hyperbole qui passe par l'origine O, qui a le point F pour un de ses foyers, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes OX et OY.

Quatre hyperboles répondent à la question. L'équation de chacune d'elles étant la forme $xy - px - qy = 0$, il s'agit de trouver les quatre couples de valeurs de p et q, exprimées en fonction des données α, β et θ. (Boilleau, N. A., **1262**.)

(*Moret-Blanc,* **78**, 557.)

438. On donne l'une des deux asymptotes d'une hyperbole équilatère, une tangente et un point de la courbe; déterminer le centre et les autres éléments de la courbe. (N. A., **1543**.)

(**85**, 532.)

439. On donne une asymptote d'une hyperbole équilatère, un point de la courbe et une circonférence tangente à l'hyperbole; déterminer ses axes et ses foyers. (N. A., **1552**.)



440. Au moyen de l'hexagramme de Pascal, construire le sommet d'une hyperbole, connaissant l'axe transverse, deux points et la direction d'une asymptote. (LEMOINE, J. S., **137**.)

(*Clément*, **88**, 215.)

Une parabole.

441. Construire une parabole, connaissant le sommet, une tangente et un point. (LAISANT, N. A., **1143**.)

(*Moreau*, **75**, 132; **76**, 132.)

442. On donne sur un même plan deux circonférences inégales : décrire une parabole doublement tangente à chacune d'elles, et trouver la valeur du paramètre de la parabole en fonction des rayons et de la distance des centres des deux circonférences données. (N. A., **1169**.)

(*Rasselet*, **75**, 382.)

443. Construire une parabole tangente à une circonférence donnée, connaissant l'axe et le paramètre de la parabole.

(N. A., **1458**.)

(*Moret-Blanc*, **84**, 394.)

444. On donne un point M à l'intérieur d'une parabole ASB dont le foyer est en F. On demande de déterminer les paraboles qui satisfont aux conditions suivantes :

1° De passer par les points F et M;

2° D'être tangentes à la parabole ASB;

3° D'avoir leurs axes parallèles à celui de cette parabole.

(BROCARD, N. C., **352**.)

(*Jamet*, **78**, 247.)

445. Former l'équation d'une parabole qui, partant d'un point O d'une droite donnée OA, rencontre cette droite sous des angles donnés et à une distance donnée. Former aussi

l'équation de l'axe de cette parabole. Indiquer les coordonnées du sommet. (BROCARD, N. C., **534**.)

(*Leinekugel*, **80**, 234.)

446. Construire une parabole connaissant le cercle osculateur en un point et la tangente commune qui ne passe pas par le point d'osculation. (KŒHLER, J. S., **64**.)

(*Clément*, **88**, 211.)

Une conique en général.

447. Cinq points sont situés dans un plan et tels que trois ne sont pas en ligne droite. Il y en a toujours quatre, sommets d'un quadrilatère convexe; par ces quatre points on mène deux paraboles; la conique passant par les cinq points est :

1° Une *parabole*, si le cinquième point est sur l'une des deux paraboles;

2° Une *hyperbole*, si le cinquième point est dans l'*intérieur* ou *hors* des deux paraboles;

3° Une *ellipse*, si le cinquième point est dans l'*intérieur* d'une parabole et *hors* de l'autre. (MÖBIUS, N. A., **179**.)

(*Leseurre*, **48**, 106, 177; **49**, 298.)

448. Dans une conique à centre, on donne : 1° une directrice; 2° une tangente avec le point de contact; 3° la direction du diamètre qui passe par ce point : construire la conique.

(N. A., **227**.)

(*Durand-Claye*, **50**, 246.)

449. Étant donnés dans le même plan, de grandeur et de position, cinq segments, construire une conique qui coupe chaque segment harmoniquement [1]. (CHASLES, N. A., **298**.)

(*De Jonquières*, **55**, 435.)

---

[1] Soient *a*, *b* un de ces segments, α, β les points d'intersection avec

450. p, q, r sont trois fonctions entières linéaires en x et y; $p=0$, $q=0$, $r=0$ sont les équations respectives des côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC; $p-q=0$, $q-r=0$, $r-p=0$ sont donc les équations de trois droites passant respectivement par les sommets B, C, A, et se rencontrant au même point D; soient α, β, γ les points où AD rencontre BC, où BD rencontre CA, où CD rencontre AB. Trouver en fonction de p, q, r l'équation de la conique qui touche les côtés du triangle en α, β, γ.

(CAYLEY, N. A., **368.**)

(*Faure, Cremona,* **57**, 192, 250.)

451. Mêmes données que dans la question précédente. Il s'agit de mener deux droites R, S rencontrant AB aux points r_1, s_1, BC aux points r_2, s_2, CA aux points r_3, s_3, de telle sorte que les trois systèmes de cinq points r_1, s_1, A, γ, B; r_2, s_2, B, α, C; r_3, s_3, C, β, A soient en involution, α, β, γ étant des points *doubles*. Trouver en fonction de p, q, r les équations des droites R, S.

(CAYLEY, N. A., **369.**)

(*De Jonquières, Cremona,* **57**, 189, 192, 251, 269.)

452. Construire une conique lorsqu'on donne trois tangentes et une directrice. (N. A., **475.**)

453. Trouver les axes d'une conique inscrite à un triangle fixe et ayant son pôle en un point donné. (N. C., **8.**)

(*Neuberg,* **79**, 202; **80**, 51.)

454. Trouver les axes d'une conique circonscrite à un triangle fixe et ayant son pôle en un point donné. (N. C., **9.**)

(*Neuberg,* **79**, 202; **80**, 51.)

455. La conique représentée par

$$A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 + A_{33}\gamma^2 + 2A_{12}\alpha\beta + 2A_{23}\beta\gamma + 2A_{31}\gamma\alpha = 0$$

rencontre les côtés du triangle de référence en six points tels,

---

la conique; les quatre points a, α, b, β doivent être placés harmoniquement. (*Note de Chasles.*)

que les droites qui les joignent aux sommets opposés du triangle sont tangentes à une seconde conique. Trouver l'équation de cette conique. (HESSE, N. C., **46**.)

(*Van Aubel,* **76**, 87; **77**, 162.)

456. Les droites qui joignent les sommets d'un triangle ABC à deux points quelconques M, N rencontrent les côtés opposés en six points situés sur une même conique. Trouver l'équation de cette conique, en fonction des coordonnées des points M, N. (HESSE, N, C., **47**.)

(*Van Aubel,* **76**, 87; **77**, 50.)

457. Construire une conique, connaissant trois tangentes quelconques et la tangente en l'un des sommets. (MONTESANO, M., **355**.)

(*Mantel,* **88**, 202, 274.)

458. Construire une conique osculatrice à un cercle donné en un point donné A, connaissant la corde idéale commune à la conique et au cercle infiniment petit A. (DEWULF, M., **590**.)

(*Servais,* **91**, 96.)

459. Construire une conique osculatrice à une conique donnée en un point donné et passant par deux points donnés, ou tangente à deux droites. (KŒHLER, J. S., **63**.)

460. On donne une droite et deux cercles qui ne la rencontrent pas : construire les foyers d'une conique tangente à la droite et bitangente à chacun des deux cercles. (TISSOT, J. S., **318**.)

461. On donne deux cercles ainsi qu'une droite qui les rencontre l'un et l'autre : construire les foyers d'une conique tangente à la droite et bitangente à chacun des deux cercles. (TISSOT, J. S., **327**.)

TROISIÈME PARTIE.

COURBES ALGÉBRIQUES.

DISCUSSIONS D'ÉQUATIONS.

462. Construire et discuter la courbe donnée par l'équation

$$yx^2 + bx + c = 0. \qquad \text{(N. A., 422.)}$$

(*Delestrée*, **58**, 118.)

463. Discuter la cubique donnée par l'équation

$$13y = p(25x - 12x^3). \qquad \text{(Roche, N. A., 538.)}$$

(*Welsch*, **67**, 377.)

464. Étudier les formes successives de la courbe représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 - 3axy + \lambda = 0$$

quand on fait varier λ. (Vazeille, J. S., **117**.)

(*De Longchamps*, **86**, 285.)

465. Discuter la courbe du quatrième degré donnée par l'équation

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}. \qquad \text{(Montucci, N. A., 397.)}$$

(*Chanson*, **57**, 449.)

466. Construire la courbe représentée par l'équation

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1 = 0. \quad \text{(VAZEILLE, J. S., 115.)}$$

(*Taratte,* **85**, 71.)

467. Construire les courbes suivantes

$$2x^3y^3 + x^4 - y^4 - 2xy = 0,$$

$$4x^5y^5 + x^6 - y^6 + 5x^2y^2(x^2 - y^2) - 4xy = 0. \quad \text{(J. M., 335.)}$$

(*Baron,* **81**, 565.)

468. Construire le lieu unicursal représenté par les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{\lambda(1+\lambda^4)}{(1+\lambda^2)(1-\lambda^2)^2}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda)^2(1-\lambda)^2}.$$

(VAZEILLE, J. S., **148**.)

(**88**, 285.)

CUBIQUES.

Cubiques déterminées.

469. Étant donnée une parabole ABCDE du troisième ordre, représentée par

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3;$$

on fait passer, par les extrémités A, C, E de trois ordonnées équidistantes y_0, y_1, y_2, la parabole du second ordre dont l'équation aurait la forme

$$y = A + Bx + Cx^2.$$

Ces deux courbes déterminent deux segments curvilignes ABCA, CDEC équivalents entre eux.

Corollaire I. — L'aire comprise entre la première courbe,

l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes y_0, y_2, est donnée par la formule

$$A = \frac{1}{3}\delta(y_0 + y_1 + 4y_1)\ (^1).$$

Corollaire II. — La formule de quadrature de Simpson, appliquée à la parabole du troisième ordre, est toujours *exacte*, même quand le nombre des valeurs de l'ordonnée se réduit à *trois*. (CATALAN, N. A., 393.)

(*Laquière, Catalan,* **58**, 5, 205, 207; **81**, 403.)

470. Une parabole cubique représentée par l'équation

$$x = a + by + cy^2 + dy^3$$

passe par les points A, B qui ont pour ordonnées β, β'. Les tangentes en ces points, la corde AB et la courbe coupent l'axe des x aux points T, S, U, V. Démontrer que le point V est le centre de gravité des points T, S, U pour des masses proportionnelles à β'^2, β^2, $-2\beta\beta'$. (LAISANT, M., 750.)

(Mlle *Pompilianu,* **92**, 103.)

471. Dans une cissoïde de Dioclès, l'aire comprise entre la courbe et son asymptote est égale à trois fois l'aire du cercle générateur. (BARISIEN, N. A., 1568.)

472. Soit M un point d'une strophoïde ayant pour sommet O et pour point double O'. Du point O' comme centre avec O'O pour rayon décrivons un cercle Δ. Si du point M on abaisse une perpendiculaire sur OO', cette droite rencontre Δ en deux points parmi lesquels on distinguera particulièrement le point H qui jouit de la propriété que MH = MO.

1° Reconnaître l'exactitude de cette proposition;

2° Démontrer que si les perpendiculaires à OM, au point O et les tangentes en H à Δ se coupent en T, TM est la tangente à la strophoïde;

---

(1) δ est l'intervalle de deux ordonnées consécutives.

3° Démontrer que, si l'on prend MH′ = MH, le lieu du point H′ est une cissoïde;

4° Reconnaître que la tangente au point H′ à la cissoïde passe, elle aussi, par le point T; et, faisant alors abstraction de la strophoïde considérée d'abord, déduire des remarques précédentes une construction de la tangente à la cissoïde. (J. S., **97**.)

(*Clément,* **84**, 285.)

473. On donne une droite dont le coefficient d'inclinaison est $\tang\alpha$ (axes rectangulaires). Indiquer une construction graphique qui donne directement $\tang^3\alpha$. Application à la construction graphique d'une tangente à la cissoïde et à la strophoïde, parallèlement à une direction donnée. (Brocard, N. A., **1264**.)

(*Habbé,* **79**, 375.)

474. D'un point, pris sur une strophoïde droite, on mène les deux tangentes à la courbe, autres que celle au point considéré. Démontrer que la corde des contacts enveloppe une parabole ayant même axe et même sommet que la strophoïde, et son foyer symétrique du point double par rapport à ce sommet.

(Fauquembergue, M., **488**.)

(*Jamet,* **87**, 49, 72.)

475. La strophoïde oblique est le lieu des projections d'un point quelconque du plan d'une parabole sur ses tangentes. On demande d'autres modes de génération de la strophoïde oblique.

(Brocard, N. C., **586**.)

476. On considère une strophoïde oblique S ayant pour point double le point O. Les tangentes en O ont, pour bissectrices des angles qu'elles forment, deux droites Δ, Δ' qui rencontrent S, respectivement aux points P, P′.

Démontrer les propriétés suivantes : 1° la projection de O sur PP′ est un point Q situé sur S; 2° le point Q′ isotomique de Q sur PP′ (c'est-à-dire symétrique de Q par rapport au milieu de PP′) appartient à l'asymptote réelle de S; 3° cette asym-

ptote est parallèle à la droite qui joint O au milieu de PP'; 4° si du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit un cercle Δ, les tangentes issues des points P, P' à ce cercle se coupent en quatre points situés sur S.

(De Longchamps, J. S., 218.)

(*Cotoné*, **90**, 207.)

477. Trouver la podaire de la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

On prendra pour point fixe le sommet de la courbe.

Indiquer les coordonnées des points de rebroussement et l'inclinaison des tangentes en ces points.

(Brocard, N. C., 513, M., 209.)

(*Brocard*, M., **88**, 167.)

478. Construire la podaire de l'origine relativement à la courbe que représente l'équation

$$x^3 + y^3 - a^3 = 0$$ (Vazeille, J. S., 116.)

(*De Longchamps*, **86**, 284.)

***479**. Si par un point de la courbe ayant pour équation $x^3 + y^3 = A$, on mène des tangentes, démontrer que, des quatre autres points de contact, deux sont réels et deux sont imaginaires. Démontrer que les points de contact réels ne peuvent avoir en même temps leurs coordonnées commensurables.

(E. Lucas, J. S., 50.)

480. Si a, b, c sont les coordonnées homogènes d'un point de la courbe ayant pour équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = (y+z)(z+x)(x+y),$$

le point qui a pour coordonnées A, B, C appartient aussi à la courbe, A, B, C étant déterminés par les relations

$$A(b^2 + c^2 - a^2) = B(c^2 + a^2 - b^2) = C(a^2 + b^2 - c^2)$$

(N. C., 288.)

Cubiques en général.

481. Une courbe du troisième ordre étant composée d'une branche infinie et d'un ovale, si l'on prend sur la branche infinie trois points en ligne droite et que par chacun de ces points on mène deux tangentes à l'ovale, les trois cordes de contact passent par un même point. Lorsque la branche infinie devient une droite, l'ovale se change en une conique et l'on revient au théorème de la Hire. (CHASLES, N. A., **280**.)

(*Padula, de Jonquières*, **55**, 89; **56**, 99.)

482. Soient a_1, a_2, a_3, ..., a_9 neuf points d'intersection de deux courbes du troisième degré; par les quatre points a_1, a_2, a_3, a_4, et successivement par chacun des points a_5, a_6, a_7, a_8, faisons passer une conique; on aura quatre coniques. Les quatre polaires d'un point quelconque du plan, par rapport à ces coniques, forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant; ce rapport est égal au rapport anharmonique du faisceau que l'on obtient en joignant par des droites le point a_9 aux points a_5, a_6, a_7, a_8. (CHASLES, N. A., **301**.)

(*Woepcke*, **55**, 235; **56**, 61.)

483. Toutes les courbes planes du troisième degré qui passent par huit points donnés se croisent en un seul et même neuvième point; construire ce point au moyen du théorème énoncé dans la question précédente. (CHASLES, N. A., **302**.)

(*Woepcke*, **55**, 236; **56**, 61.)

484. Dans une courbe plane du troisième degré, les trois sommets du triangle des asymptotes et les trois sommets du triangle des tangentes aux points d'inflexion sont sur une même conique.
(FAURE, N. A., **454**.)

(*Moreau*, **77**, 382.)

485. Si les côtés *ab*, *bc*, *cd*, *da* et la diagonale *bd* d'un qua-

drilatère plan variable *abcd* tournent autour de cinq points fixes *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, les sommets *a* et *c* qui sont au dehors de la diagonale glissant sur deux droites fixes M et N, chacun des autres sommets *b*, *d* décrira une cubique. (GRASSMANN, N. A., **499.**)

(*Cremona, de Jonquières,* **60**, 356; **61**, 26.)

***486.** Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une courbe du troisième ordre, qui passe, comme on sait, par les six sommets du quadrilatère complet; mais elle passe aussi par les *pieds* des hauteurs du triangle déterminé par les trois diagonales du quadrilatère, et comme elle passe d'ailleurs par les deux points situés *à l'infini* sur un cercle, cette courbe doit occuper parmi les courbes du troisième ordre le même rang que le cercle dans les coniques; ainsi elle a comme le cercle un double foyer. (FAURE, N. A., **549.**)

487. La courbe du troisième ordre qui passe par les six sommets d'un quadrilatère complet et par les pieds des hauteurs du triangle formé par ses diagonales passe par les deux points situés à l'infini sur un cercle. (FAURE, N. A., **563.**)

(*Cremona,* **64**, 21.)

488. La courbe du troisième ordre que l'on trace ainsi (*voir* question précédente) est le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère; elle rappelle le cercle dans la théorie des courbes du second ordre. (FAURE, N. A., **564.**)

(*Cremona,* **64**, 21.)

489. Lorsqu'un triangle ABC est à la fois inscrit dans une courbe du troisième degré et circonscrit à cette même courbe, le produit des rayons de courbure aux points A, B, C est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

(MANNHEIM, N. A., **605.**)

(*Griffiths,* **64**, 173, **66**, 191) (1).

---

(1) Solution incomplète.

490. On donne une courbe du troisième ordre ayant un point double et en ce point des tangentes perpendiculaires entre elles; les hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans cette courbe, et dont les sommets de l'angle droit sont toujours au point double, passent par un même point de la courbe.

(N. A., 620.)

(*Halphen*, **62**, 348.)

491. On donne une courbe de troisième classe ayant une tangente double : les points de contact de cette tangente et de la courbe sont A, B. D'un point quelconque pris dans le plan de la courbe donnée, on mène à celle-ci trois tangentes qui coupent la tangente AB aux points M, N, P.

On a toujours

$$\frac{AM \times AN \times AP}{BM \times BN \times BP} = \frac{\rho_A}{\rho_B},$$

ρ_A et ρ_B étant les rayons de courbure de la courbe donnée en A et en B. (Mannheim, N. A., 757.)

(*Bricout de Montay*, **66**, 333.)

492. D'un point M situé dans le plan d'une conique on mène à celle-ci les deux tangentes MA et MB, puis par M on mène une droite MC.

Aux points A et B on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à MC.

Démontrer : 1° que ces coniques touchent MC au même point C; 2° que, si l'on faisait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de MC du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'elles auraient en C quatre points communs confondus.

(Ribaucour, N. A., 858) [1].

(*Farineau*, **69**, 460.)

493. Démontrer la même proposition pour les courbes du

[1] Cette question se lie étroitement à la suivante. C'est pourquoi elle figure ici, tout en ne se rapportant pas directement aux cubiques.

troisième degré, lorsque M est sur la polaire d'un point d'inflexion. (RIBAUCOUR, N. A., 859.)

*494. Si deux triangles sont homologiques, montrer qu'on peut faire passer par leurs six sommets une cubique telle, que les tangentes aux trois sommets de chacun des triangles aillent concourir respectivement en un point situé sur la courbe.

(SYLVESTER, N. A., 895.)

495. Soit I un point d'inflexion d'une cubique. Par I menons des tangentes en P, Q, R à la courbe, et par P des tangentes en A, B, C, D. Montrer que I, Q, R sont les points de rencontre respectifs des trois couples de côtés opposés du quadrilatère ABCD. (SYLVESTER, N. A., 896.)

(*Vallier*, **71**, 182; **72**, 32.)

*496. Soit C^3 une courbe du troisième ordre et de la troisième classe : on s'approche indéfiniment d'un point d'inflexion en construisant sur la courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point d'intersection de la courbe avec la tangente au point précédent. (ÉM. WEYR, N. A., 992.)

*497. Soit C^3 une courbe du troisième ordre et de la troisième classe : on construit sur cette courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point de contact de la tangente qu'on peut mener à la courbe par le point précédent. Prouver que ces points se rapprochent de plus en plus d'un point de rebroussement. (ÉM. WEYR, N. A., 993.)

498. Il y a deux cubiques passant par huit points donnés et tangentes à une droite menée par l'un de ces points.

(N. A., 1356.)

(*Pecquery*, **81**, 184) (1).

499. Si d'un point P on mène des tangentes à des cercles

---

(1) Généralisation.

ayant même axe radical, on sait que le lieu des points de contact est une cubique circulaire. Faire voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une cubique circulaire puisse être ainsi engendrée est que les asymptotes imaginaires se rencontrent sur la courbe. (CRETIN, J. S., **152**.)

QUARTIQUES.

500. L'équation de la développée de la courbe

$$a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2,$$

qui est le lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une ellipse sur ses tangentes, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sqrt{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}\Big[(2b^2 - a^2)a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + (2a^2 - b^2)b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\Big] = ab(a^2 - b^2).$$

(STREBOR, N. A., **147**.)

(*De Perrodil*, **47**, 275.)

501. L'aire de la podaire du centre d'une ellipse est une moyenne *arithmétique* entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres.

On obtient aussi cette courbe par la construction des rayons réciproques émis du centre de l'ellipse, et l'on peut déterminer sur cette courbe des arcs à différence circulaire.

(LESCASES, N. A., **486**.)

(**64**, 129) [1].

502. On donne un point P dans le plan d'une conique; on sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur toutes les tangentes de la conique a un point double en P. Démontrer que les centres de courbure de cette courbe corres-

---

[1] *Voir* aussi N. A., **52**, 183.

pondant à ce point double sont à égale distance du diamètre qui contient le point P. (MANNHEIM, N. A., 650.)

(*Mansion*, **63**, 502; **64**, 77.)

*503. Trouver l'équation d'une courbe qui représente les trois folioles égales du *Trifolium pratense*. Chaque foliole est partagée symétriquement par une droite qui aboutit vers l'intérieur à un point de rebroussement et à l'extérieur à un point d'inflexion. Les trois droites formant entre elles des angles de 120° se réunissent (*à peu près*) au même point du pédoncule.

(N. A., 539) [1].

504. Soient C le centre, F, F′ les foyers et P un point quelconque d'une ellipse de Cassini. Qu'on décrive un cercle passant par F, F′ et P, et supposons que la normale à la courbe au point P rencontre ce cercle en un second point N; alors on aura cette relation

$$CP \times PN = \text{const.}$$ (STREBOR, N. A., 576.)

(*Mogni*, **63**, 61.)

505. Soient F, F′ les foyers d'une ellipse de Cassini, C son centre, et P un point quelconque sur la courbe. Alors la normale en P fera avec FP un angle égal à celui que fait la droite CP avec F′P. (STREBOR, N. A., 755.)

(*Moreau*, **66**, 361, 362.)

506. Les deux ellipses de Cassini données par les équations

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4 = b^4,$$
$$(x^2+y^2)^2 - 2a'^2(x^2-y^2) + a'^4 = b'^4,$$

---

[1] Cet énoncé, textuellement reproduit, manque un peu de clarté; la description de la courbe laisse à désirer. Il n'en est pas moins intéressant, comme représentant un type, assez rare, du problème sur lequel Auguste Comte insiste avec tant de soin dans sa *Géométrie analytique*, et qui a pour objet de trouver une équation qui représente une courbe donnée par sa forme, sans être autrement définie.

se coupent orthogonalement, pourvu qu'on ait

$$(a^2 - a'^2)^2 = b^4 + b'^4.$$ (STREBOR, N. A., **766.**)

(*Laisant,* **66**, 466.)

507. Étant donnés, sur une ellipse de Cassini dont les foyers sont f et g, deux points a et b, désignons par α et β les points où les normales en a et en b coupent l'axe de la courbe qui renferme les foyers, et par i le point où cet axe est coupé par la perpendiculaire élevée sur le milieu du segment ab; démontrer la relation

$$\frac{1}{i\alpha} + \frac{1}{i\beta} = \frac{1}{if} + \frac{1}{ig}.$$ (LAGUERRE, N. A., **986.**)

(*Lez,* **73**, 446.)

508. Étant donnée une ellipse de Cassini, et étant pris sur cette ellipse deux couples de points diamétralement opposés a, a' et b, b'; si l'on joint ces quatre points à un point quelconque m de la courbe, la différence des angles $a'ma$ et $b'mb$ est constante. (LAGUERRE, N. A., **988.**)

(*Brocard,* **72**, 507.)

509. Le rayon de courbure en un point M de la lemniscate de Bernoulli est égal au tiers de la normale limitée à la perpendiculaire abaissée du centre O sur le rayon vecteur OM.

(D'OCAGNE, N. A., **1606.**)

(*Bardelli,* **91**, 29*.)

510. Étant donnée une série de limaçons de Pascal, décrits avec la même circonférence et ayant le même point double, par ce point on trace une transversale et on fait passer une circonférence par le point double et par chaque point d'intersection, tangente à la courbe en ce point : *Toutes ces circonférences ont même axe radical et, lorsque la transversale tourne autour du point double, cet axe radical tourne autour de ce point,*

et le second point commun à toutes ces circonférences décrit un cercle. (DELEVAQUE, N. A., 665.)

(*Haag*, **64**, 170, 171.)

*511. Déterminer les points d'intersection de l'axe radical de deux circonférences avec le limaçon de Pascal, lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés sont tangents aux deux circonférences. (BROCARD, N. C., 433.)

*512. Les trois points de contact des tangentes à une cardioïde, parallèles à une direction donnée, se trouvent sur une ellipse de grand axe constant. (BROCARD, N. C., 355.)

513. Soient A et B deux points d'un ovale de Descartes dont les foyers sont F et F'.

AF coupe en K le cercle décrit de F comme centre avec FB pour rayon; AF' coupe en H le cercle décrit de F' comme centre avec F'B pour rayon. Joignons FH et F'K, ces droites se coupent en I.

Démontrer que la droite AI passe par un point fixe, lorsque A se meut sur l'ovale. (LEMOINE, N. A., 1182.)

(*Pravaz*, **76**, 228.)

*514. Étudier les podaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements, le point fixe étant pris sur l'un des axes de l'hypocycloïde. (BROCARD, M., 346.)

515. Par un point P, situé sur la circonférence inscrite à une hypocycloïde à quatre rebroussements, menons quatre tangentes PA, PB, PC, PD à cette courbe : 1° La partie de l'une des tangentes, PD par exemple, comprise entre les tangentes à l'hypocycloïde, en ses points de rebroussements, est divisée, en P, en deux parties égales. 2° Les autres tangentes PA, PB, PC rencontrent le cercle en trois points A, B, C qui sont les sommets d'un triangle équilatéral. 3° Si le cercle rencontre la tangente en l'un des points de rebroussement en O, et la parallèle à cette

tangente menée par P, en Q, l'arc OQ est triple de l'un des arcs OA, OB, OC. (SIDLER, N. C., **283**.)

(*Dubois,* **78**, 90, 140.)

516. Soit

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0$$

l'équation d'une kreuzcurve.

La droite qui joint les projections A, B d'un point N de cette courbe, sur les axes, touche l'ellipse qui correspond à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

en un point M. Démontrer que la parabole tangente aux axes, aux points où ils sont coupés par la tangente en N à la kreuzcurve, passe, au point M, tangentiellement à l'ellipse.

(BALITRAND, J. S., **303**.)

(*Bohn,* **92**, 43.)

517. On considère une kreuzcurve et une ellipse ayant les mêmes axes que la kreuzcurve et la touchant en un point M; démontrer que le rayon de courbure de la kreuzcurve, en M, est le tiers du rayon de courbure de l'ellipse, au même point.

(BALITRAND, J. S., **304**.

(*Brocard,* **92**, 93.)

COURBES DE DEGRÉS SUPÉRIEURS A 4.

—

Courbes de degré déterminé.

518. Le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points est une courbe du sixième ordre.

Les *Nouvelles Annales* (**45**, 324) annoncent une courbe dont le degré peut monter à 64. (FAURE, N. A., **565**.)

(*De Jonquières, Cremona,* **61**, 85; **64**, 21.)

519. La courbe parallèle à la podaire d'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=(x^2+y^2)^2$$

a pour équation

$$(\alpha\beta-\gamma)^2=4(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha\gamma),$$

en posant

$$\alpha=\frac{(a^2+b^2)(x^2+y^2-k^2)-a^2b^2}{3a^2b^2(x^2+y^2-k^2)},$$

$$\beta=\frac{(x^2+y^2-k^2)^2+(a^2+b^2)k^2-a^2x^2-b^2y^2}{3a^2b^2(x^2+y^2-k^2)^2},$$

$$\gamma=\frac{k^2}{a^2b^2(x^2+y^2-k^2)^2}.$$ (STREBOR, N. A., **618**.)

(*Bellachi,* **66**, 137.)

***520.** Trouver l'équation des courbes parallèles aux ovales de Descartes. (STREBOR, N. A., **693**.)

521. Les coniques, inscrites dans un quadrilatère fixe, qui touchent une courbe de troisième classe donnée K, sont au nombre de 12; les douze points de contact, les neuf points de rebroussement de K et les six sommets du quadrilatère circonscrit sont situés sur une même courbe du cinquième ordre.

(LAGUERRE, N. A., **1084**.)

(*Kœhler,* **73**, 186.)

***522.** Soit $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ un heptagone inscrit; d'un sommet on peut mener deux diagonales qui partagent l'heptagone en un quadrilatère et un pentagone; on a ainsi sept diagonales. Les intersections de chaque côté avec les trois diagonales qui ne passent pas par ses extrémités sont sur une quintique.

(LA CHESNAIS, N. A., **1530**.)

523. Six points, a_1, a_2, ..., a_6, sont donnés arbitrairement, dans un plan. Démontrer qu'il existe un système linéaire, triplement infini, de courbes du sixième ordre, K, douées des propriétés suivantes :

1° Les points a sont des points doubles pour toutes les courbes K;

2° Les tangentes aux courbes K, en un même point a, forment une involution;

3° Chacune des quinze droites a_1, a_2, ... et chacune des six coniques a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ... est rencontrée, par les courbes K, en couples de points en involution. (CREMONA, N. C., 556.)

(*Cremona*, **80**, 554.)

524. Étant donnés sept points dans un plan, on fait passer par cinq d'entre eux une conique, et l'on joint les deux autres par une droite qui rencontre la conique en deux points A_1 et A_2. Opérant ainsi sur tous les points successivement, on obtient quarante-deux points. Démontrer qu'il existe une courbe du sixième degré passant par ces quarante-deux points, et ayant les sept points donnés pour points doubles. Trouver son équation. (WEILL, J. S., 128.)

(*Bourgarel*, **89**, 211.)

Courbes d'un degré quelconque.

525. abc, ABC étant deux triangles rectilignes situés dans le même plan, les quatre sommets b, c, B, C sont fixes; on a la relation

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \text{const.}$$

Si le sommet a décrit une ligne plane algébrique de degré pair et divisée par la droite bc en deux parties égales et symétriques, le sommet A décrit une ligne de même degré.

(JACOBI, N. A., 170.)

(*P. Serret*, **48**, 99.)

526. Si un point P se meut dans un plan de manière que la somme des carrés des tangentes PA_1, PA_2, PA_3, ..., $PA_{n(n-1)}$, menées de ce point à une courbe algébrique de degré n, située dans ce plan, soit constante, la normale en P, au lieu géométrique de P, passe par le centre de moyenne distance des centres

de courbure de la courbe, correspondant aux points de contact $A_1, A_2, \ldots, A_n$. (N. A., 200.)

(*Jubé,* **50**, 209, 211.)

527. $n = 0$ est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de degré m entre trois coordonnées. Lorsque le déterminant de cette fonction ([1]) est *identiquement* nul, l'équation représente un faisceau de m droites. (Hesse, N. A., 285.)

(*Faure, Brioschi,* **54**, 398, 402.)

***528.** Soient donnés dans un même plan : 1° une courbe algébrique par une équation de degré n; 2° un triangle dont les côtés sont donnés par les trois équations linéaires

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0;$$

d'un point quelconque M pris sur la courbe, abaissons sur les côtés du triangle p, q, r respectivement les perpendiculaires P, Q, R; construisons une seconde courbe dont les points aient pour coordonnées $\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}$; démontrer : 1° que la seconde courbe est aussi de degré n; 2° que l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint deux points correspondants M, m des deux courbes est de degré $2n$. (N. A., 383.)

529. m droites sont données dans un plan, ainsi qu'un point A. Soient (a, b) le point d'intersection de deux quelconques de ces droites a, b, et B la droite conjuguée harmonique de la droite qui passe par A et (a, b) relativement aux deux droites a et b. Nous aurons dans le plan $\frac{1}{2}m(m-1)$ points (a, b) et autant de droites B. On demande : 1° de démontrer que par ces $\frac{1}{2}m(m-1)$ points on peut toujours mener une courbe de degré $m-1$ qui touche les droites B en ces points (a, b); 2° de donner l'équation de cette courbe; 3° appelant A la courbe ainsi construite, considérons une autre courbe B tracée au moyen d'un second point A′

(1) *Voir* N. A., **51**, 125.

de la même manière que la précédente; du point A on peut mener $(m-1)(m-2)$ tangentes à la courbe B, par le point A′ on peut en mener autant à la courbe A : on a ainsi $2(m-1)(m-2)$ points de contact qui sont sur une courbe de degré $m-2$; 4° donner l'équation de cette courbe. (FAURE, N. A., 388.)

(*De Jonquières*, **57**, 347.)

*530. Une courbe C_n de degré n et une conique C_2 sont données dans le même plan; on prend la polaire d'un point quelconque situé sur C_n par rapport à la conique C_2; soient P et Q les points d'intersection de cette polaire avec la conique; le degré du lieu du point d'intersection des deux normales menées en P et Q à la conique ne dépasse pas $3n$. (DESBOVES, N. A., 495.)

531. Soient $y^m = F(x)$ l'équation d'une courbe algébrique; $y - y_1 = F'(x_1)(x - x_1)$ l'équation d'une tangente au point x_1, y_1; X, Y un point quelconque de cette tangente. $\frac{Y^m}{F(X)}$ est un maximum ou un minimum lorsque $Y = y_1$, $X = x_1$.

(DUHAMEL, N. A., 534.)

(*Kessler*, **60**, 433.)

*532. Étant données, dans un plan, deux courbes géométriques, l'une de *degré m* et l'autre de la *classe n*; si une tangente roule sur celle-ci et que, par les points où elle rencontre la courbe C_m, on mène à cette courbe des tangentes et des normales :

1° Les tangentes se coupent deux à deux sur une courbe de degré $\frac{1}{2}mn(m-1)(2m-3)$;

2° Les normales se coupent deux à deux sur une courbe de degré $\frac{1}{2}mn(m-1)(2m-1)$. (DE JONQUIÈRES, N. A., 583.)

*533. Le nombre des sommets [1] d'une courbe algébrique est,

---

[1] Les sommets sont les points où la courbure est maximum ou minimum.

en général, donné par la formule

$$3i + 5c - 3d - 3p,$$

dans laquelle i, c, d représentent le nombre des points d'inflexion, la classe, le degré de la courbe donnée, et p le nombre des branches paraboliques. (LAGUERRE, N. A., 772.)

*534. Si par $3n - 1$ points *consécutifs* sur une courbe de troisième degré on fait passer une courbe quelconque du $n^{\text{ième}}$ degré, les coordonnées de l'intersection des deux courbes seront des fonctions du degré $(3n-1)^2$ des coordonnées du point de contact. (SYLVESTER, N. A., 812.)

535. D'un point quelconque (x_0, y_0) du plan, on peut mener $2m - p$ normales à la courbe

$$(1) \qquad y^m - max^p = 0,$$

$$(m > p);$$

les pieds de ces normales sont sur la conique

$$(2) \qquad mx^2 + py^2 - mx_0 - py_0y = 0.$$

Cette conique passe par l'origine O et le point $P(x_0, y_0)$; son centre est le milieu de la droite OP, et son équation ne dépend pas du paramètre a. De là plusieurs conséquences remarquables et immédiates. (PAINVIN, N. A., 1131.)

(*Lemelle*, **74**, 392.)

*536. Étant donnés, dans un plan, une courbe générale de $n^{\text{ième}}$ classe et un point, il existe $2n(n+1)$ paraboles, ayant un même paramètre, qui ont pour foyer le point donné et sont tangentes à la courbe donnée.

La somme des angles que font, avec une direction quelconque Δ du plan, les axes de ces paraboles, est égale, à un multiple de π près, au quadruple de la somme des angles que font avec la

direction Δ les droites joignant le foyer commun des paraboles aux n foyers de la courbe, augmenté du double de la somme des angles que font avec Δ les $n(n-1)$ directions asymptotiques de cette courbe. (FOURET, N. A., 1596.)

537. Construire, point par point, au moyen d'une équerre, la courbe qui correspond à l'équation

$$x^{4n} = \frac{y}{h}(y-h)^{4n},$$

n désignant un nombre positif entier.

(DE LONGCHAMPS, J. S., 101.)

(*Fesquet*, **85**, 93.)

538. Si une courbe parabolique représentée par

$$y = (x-a)(x-b)\ldots(x-k)$$

rencontre en A, B, ..., K l'axe des abscisses, et que A′, B′, ..., H′ soient les pieds des ordonnées des points pour lesquels la tangente est parallèle à cet axe, on a

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \ldots + \frac{1}{AK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AA'} + \frac{1}{AB'} \ldots + \frac{1}{AH'}\right).$$

(CATALAN, J. S., 191.)

(*Beyens*, **89**, 239.)

Courbes algébriques en général.

539. Par un point P pris dans le plan d'une courbe algébrique M, on mène des normales à cette courbe, qui la rencontrent aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On suppose que la somme des carrés de ces normales est égale à p^2, quantité constante. Le point P engendre une nouvelle courbe M_1; la normale à cette courbe menée par le point P passe par le centre de gravité des points A_1, A_2, etc.

Cherchons un point Q, tel que l'on ait

$$(QA_1)^2 + (QA_2)^2 + \ldots + (QA_n)^2 = p^2.$$

Le lieu du point Q est une courbe M_2 touchant la courbe M_1 au point P.

Il en sera de même pour une relation quelconque entre les normales; dans la relation donnée, M_2 est un cercle.

(N. A., **295**.)

(*Painvin, Faure,* **57**, 85; **62**, 64; **63**, 449.)

540. Par deux points A, B pris dans le plan d'une courbe de degré quelconque, on décrit une circonférence: on fait le produit des distances du point A à tous les points d'intersection de cette circonférence et de la courbe donnée; on fait le produit analogue pour le point B ; le rapport de ces produits est constant, quelle que soit la circonférence passant par les points A et B. (LAGUERRE, N. A., **651**.)

(*Jaufroid,* **64**, 134.)

541. Lorsqu'une courbe a quatre foyers sur un cercle, elle en a nécessairement douze autres situés par quatre sur trois autres cercles; tous ces cercles sont orthogonaux entre eux.

(LAGUERRE, N. A., **698**.)

(*Cornu,* **65**, 518.)

542. D'un point pris dans le plan d'une courbe géométrique on mène toutes les tangentes à cette courbe, on divise le rayon de courbure relatif à chaque point de contact par le cube de la distance de ce point au point fixe d'où émanent les tangentes : la somme de tous les rapports ainsi obtenus est égale à zéro.

(MANNHEIM, N. A., **745**.)

(*Maffiotti,* **68**, 181.)

543. D'un point M situé dans le plan d'une courbe algébrique on mène toutes les tangentes à cette courbe et une droite quelconque MA. Aux points de contact des tangentes issues de M on construit les coniques ayant quatre points confondus sur la

courbe et tangentes à MA. Si t désigne la distance comptée sur MA du point M au point de contact de l'une de ces coniques et R le rayon de courbure de cette conique en ce point de contact, on a

$$\sum \frac{R}{t^4} = 0,$$

la somme s'étendant à toutes les coniques.

(Ribaucour, N. A., 857.)

(*Ed. Weyr,* **72**, 331.)

QUATRIÈME PARTIE.

COURBES TRANSCENDANTES OU QUELCONQUES.
COORDONNÉES POLAIRES. — TRANSFORMATIONS.

COURBES TRANSCENDANTES.

Discussions d'équations.

544. Construire la courbe

$$Lx.Ly = K.$$ (LAISANT, J. S., **28**.)

(*Alexandre*, **83**, 234, 262.)

***545.** Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = \log x + \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$ (REALIS, J. S., **187**.)

***546.** Même question, l'équation de la courbe étant

$$y = \log x \,\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$ (REALIS, J. S., **188**.)

***547.** Construire les courbes représentées par l'équation

$$y = \frac{\log x + \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right)}{\log x + \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)}$$ (REALIS, J. S., **189**.)

548. Construire la courbe Γ qui correspond aux formules

$$\frac{x}{a} = \frac{\cos t - \sin t}{e^t}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\cos t + \sin t}{e^t},$$

dans lesquelles t désigne un paramètre variable. Montrer que Γ est une spirale logarithmique et vérifier que la développée de cette spirale est une courbe égale à Γ.

(DE LONGCHAMPS, J. S., **242**.)

(*Leinekugel*, **90**, 280.)

Propriétés ou problèmes.

549. La caustique par réflexion de la développante d'un cercle pour des rayons émanés du centre est une développée de la spirale d'Archimède. (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **659**.)

(*Rouquel*, **63**, 497, 548.)

550. La courbe réciproque de la développante d'un cercle pour des rayons émanés du centre est une spirale tractrice. (On appelle ainsi la courbe qui, en coordonnées polaires, a une tangente constante.) (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **660**.)

(*Rouquel*, **63**, 498, 549.)

551. En partageant dans un rapport constant les normales d'une cycloïde quelconque (ordinaire, allongée ou raccourcie), on obtient une courbe dont les arcs sont exprimables en arcs d'ellipse. (MANNHEIM, N. A., **699**.)

(*Fouret*, **65**, 555; **80**, 63.)

***552.** Trouver l'équation de la podaire négative de la développante de l'ellipse, le centre étant le pôle.

(STREBOR, N. A., **718**.)

553. Les centres de courbure d'une spirale d'Archimède qui

correspondent à des points situés sur un même rayon vecteur appartiennent à une même ellipse. (FOURET, N. A., 934.)

(*Brocard*, **69**, 328.)

554. Démontrer qu'en un point quelconque d'une spirale équiangle, la conique osculatrice est une ellipse et que le point de contact est à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse; la tangente de l'angle de ces diamètres est égale à trois fois la tangente de l'angle de la spirale.

(WITWORTH, N. A., 1022.)

(*Pellissier*, **73**, 461.)

555. Lorsqu'on fait tendre m vers l'infini, les courbes représentées par

$$x^{2m+1} + y^{2m+1} = a^{2m+1}$$

se rapprochent d'une ligne brisée, transcendante, dont on demande l'équation. (BROCARD, N. C., 101.)

(**79**, 203, 235.)

***556**. Si l'on coupe par une droite une spirale logarithmique, et qu'en n des points d'intersection on construise les tangentes; celles-ci rencontrent la courbe en de nouveaux points, qui sont situés, n à n, en ligne droite. (KLEIN, N. C., 186.)

***557**. Soit O le pôle d'une spirale sinusoïde, c'est-à-dire d'une courbe de la famille représentée par l'équation

$$u^m = a^m \cos m\omega.$$

On considère les développées successives de cette spirale. Déterminer la position-limite du centre de courbure répondant au sommet situé sur l'axe polaire. Applications à des cas particuliers. (BROCARD, N. C., 322.)

558. Soient AB, BC, CA, trois arcs de spirales logarithmiques ayant même pôle O. Soient OC′ la bissectrice de l'angle BOA,

et C′ son point de rencontre avec AB; soient enfin A′, B′ deux points analogues à C′, sur BC et CA.

Démontrer que les trois arcs de spirales logarithmiques AA′, BB′, CC′, ayant O pour pôle, se coupent en un même point.

Déterminer ce point. (LAISANT, N. C., **505**.)

(*Cesaro*, **80**, 87.)

559. Étant donnés deux droites AB, CD et un point M, on construit le triangle CDM_1 semblable à ABM, le triangle CDM_2 semblable à ABM_1, le triangle CDM_3 semblable à ABM_2 et ainsi de suite. Démontrer que les points M, M_1, M_2, M_3, ... appartiennent à une même spirale logarithmique. (NEUBERG, M., **98**.)

(*Brocard*, **82**, 46.)

560. Soient donnés diverses cycloïdes, l'une ordinaire, les autres allongées ou raccourcies, de même base, de même hauteur et de même sommet, et le cercle générateur tangent à ces courbes en leur sommet commun. Les tangentes à ces diverses courbes aux points situés sur une parallèle à la base commune se coupent en un même point situé sur la développante du cercle générateur considéré. (MISTER, M., **134**.)

(*Neuberg*, **87**, 17.)

561. On sait que, si l'on fait tourner d'un certain angle λ, autour de son pôle, une spirale logarithmique, on obtient la développée de cette ligne. La spirale étant définie par l'angle V, que font ses tangentes avec les rayons vecteurs, passant par les points de contact respectifs, on demande de déterminer l'angle V, de manière que λ soit un minimum. Chercher, en outre, cette valeur minima de λ. (CESARO, M., **297**.)

(*Timmerhans*, **85**, 136.)

562. La chaînette d'égale résistance, qui a pour équation intrinsèque

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

est la seule ligne dont le rayon de courbure soit égal au segment de la normale, intercepté par deux droites fixes parallèles.

(Cesaro, M., **665**.)

(*Cesaro*, **90**, 237.)

563. Faire voir à l'aide de la seule théorie des logarithmes que, si l'on trace des courbes représentées par des équations

$$y = a^x, \qquad y = b^x,$$

l'une d'elles deviendra la projection de l'autre si l'on fait tourner son plan d'un angle convenable autour de l'axe des y.

Exprimer cet angle en fonction du module relatif des deux systèmes de logarithmes correspondants. (Picquet, J. M., **214**.)

(*D'Ocagne*, **80**, 190.)

564. Les points de contact des tangentes menées à une développante de cercle par un point quelconque de son plan appartiennent à un limaçon de Pascal. (Fouret, J. S., **111**.)

(*Lhébrard*, **88**, 261.)

COURBES QUELCONQUES.

565. Un angle constant étant circonscrit à une courbe plane géométrique, la tangente au lieu géométrique de son sommet, menée par ce sommet, est aussi tangente au cercle qui passe par ce sommet et par les deux points de contact correspondants.

(N. A., **103**.)

(*Crosson*, **46**, 127, 147.)

566. Sur toutes les tangentes d'une courbe quelconque S, et à partir du point de contact M, on prend une longueur constante MM_1. La normale à la courbe S_1, lieu des points M_1, passe par le centre de courbure O de la courbe S au point M; sur la normale M_1O et au point O élevons une perpendiculaire qui

coupe la tangente MM_1 au point T. La droite CT, qui joint le point T au centre de courbure C de la développée de S au point M, coupe la normale M_1O au point O_1 qui sera le centre de courbure de S_1 au point M_1. (NICOLAIDÈS, N. A., **771**.)

(*Lemaitre*, **67**, 283.)

567. 1° Soient P un point variable d'une courbe plane donnée (A), O un point fixe, et Q le sommet d'une hyperbole équilatère dont le centre est en O, et qui touche la courbe donnée en P. Montrer que la tangente en Q à la courbe lieu du point Q fait avec OQ un angle égal à celui que fait OP avec la tangente à (A) en P.

2° La courbe (B), inverse du lieu Q par rapport à l'origine O, sera réciproque à la courbe donnée; c'est-à-dire que si (B) est regardée comme donnée, la courbe primitive (A) en dérivera précisément comme (B) dérive de (A).

(Une conique rapportée à son centre et une ellipse de Cassini sont en ce sens des courbes réciproques.)

(W. ROBERTS, N. A., **897**.)

(*Schlegel*, **69**, 467.)

***568.** Étant donné un polygone plan et convexe dont deux côtés consécutifs quelconques font un angle constant, on sait que le lieu du point tel qu'en projetant ce point sur les côtés du polygone et joignant les projections consécutives par des droites, on forme un polygone d'une aire donnée, est une circonférence. Quand la valeur de l'aire varie, on obtient diverses circonférences qui ont toutes même centre O. Démontrer que ce point O est le centre des moyennes distances des sommets du polygone primitif, ou, plus généralement, des points qu'on obtient en prenant les centres de tous les couples de deux côtés séparés par un même nombre k de côtés; ce point O est aussi le centre des moyennes distances de ses projections sur les côtés du polygone. Voir ce que deviennent ces théorèmes quand ces côtés deviennent infiniment petits, et que le polygone se transforme en une courbe plane et convexe. On retrouvera en particulier une pro-

position bien connue, de Steiner, relative au centre de gravité de masses appliquées aux différents arcs infiniment petits égaux de la courbe, et inversement proportionnelles aux rayons de courbure correspondants. (DIDON, N. A., 1074.)

*569. On donne une courbe plane quelconque et la tangente *at* au point *a* de cette courbe. On mène la corde *bc* parallèlement à la tangente *at*. Lorsque *bc* se rapproche indéfiniment de *at*, en restant parallèle à cette droite, on demande :

1° La limite des positions de la droite *ae* qui joint le point *a* au milieu *e* de la corde *bc*. On obtient ainsi à la limite la droite que M. Transon a appelée *axe de déviation* de la courbe en *a*;

2° La limite des positions du point de rencontre des axes de déviation de la courbe en *b* et *c*;

3° La limite des positions des droites qu'on obtient en joignant le point *a* aux points d'intersection des cercles osculateurs de la courbe donnée en *b* et *c*;

4° La limite des positions du point de rencontre de la corde commune à ces deux circonférences et de la tangente *at*.

(MANNHEIM, N. A., 1078.)

*570. Soient (C) et (C′) deux courbes planes qu'une droite mobile rencontre sous des angles constants μ et μ_1.

Pour que ces deux courbes soient semblables, il faut qu'elles soient deux *spirales logarithmiques* semblables par rapport au point asymptotique, et tournées autour de ce point, l'une relativement à l'autre, d'un angle égal à la différence des angles de rencontre μ et μ_1.

Remarquer le cas de deux courbes semblables, mais quelconques, tournées l'une relativement à l'autre d'un certain angle, autour du pôle de similitude.

Point de contact de la droite mobile avec son enveloppe, dans les deux cas. (HABICH, N. A., 1277.)

*571. Soit M un point quelconque d'une courbe plane C. Soit P le point de la podaire de C, qui correspond à M, O étant le

pôle. Soit enfin ε l'angle de contingence de C, et $d\sigma$ l'élément de la podaire. On a

$$d\sigma = \mathrm{OM}.\varepsilon.$$ (CATALAN, N. C., 104.)

572. Lorsqu'une tangente, de longueur constante L, parcourt la circonférence d'une courbe fermée, convexe, l'aire décrite par le segment L est égale à celle du cercle de même rayon.

(AUTOS, N. C., 356.)

(*Jamet,* 78, 249; 80, 206; N. A., 63, 391.)

573. Lorsqu'une tangente MT, de longueur constante L, parcourt la circonférence d'une courbe fermée, convexe, la normale à la courbe décrite par T, au point T, s'obtient en construisant l'hypoténuse du triangle rectangle dont les côtés sont : le premier, la longueur L = MT, comptée sur la tangente à la courbe donnée, au point correspondant, à partir du point de contact; et le second, le rayon de courbure MC en ce point de la même courbe. (AUTOS, N. C., 357.)

[*Jamet, Mennesson,* 78, 251, 329 (1); 80, 206; N. A., 63, 391.]

574. Soient M un point d'une courbe (S), C″ le point correspondant de sa seconde développée, O le milieu du rayon de courbure en M. La tangente en O, au lieu géométrique de ces milieux, est perpendiculaire à la droite MC″.

(MENNESSON, N. C., 437.)

(*Laisant,* 79, 27.)

575. Soit ABCDE...L une courbe dont la concavité est tournée vers une droite *al* sur laquelle on a abaissé des perpendiculaires, équidistantes d'une quantité h, savoir :

$$a\mathrm{A} = y_1, \quad b\mathrm{B} = y_2, \quad c\mathrm{C} = y_3, \quad \ldots, \quad l\mathrm{L} = y_n.$$

---

(1) Généralisation.

L'aire $S = aABC\ldots Ll$ est donnée par la formule

$$S = T + \frac{1}{6}\frac{n}{n-1} hD \quad \text{(approximativement)},$$

$$T = h(\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n),$$

$$D = \frac{y_2 + y_{n-1}}{2} - \frac{y_1 + y_n}{2},$$

avec une erreur moindre que $\frac{5n-6}{6n-6} hD$. L'erreur est nulle, si la courbe est une parabole du deuxième ou du troisième degré. (MANSION, M., **92**.)

(*Mansion*, **87**, 77.)

576. Dans les mêmes hypothèses qu'à l'énoncé précédent, sauf que le nombre des ordonnées est supposé $(2n+1)$, on peut poser aussi approximativement

$$S = m' + hd - \tfrac{1}{3} hd',$$

en écrivant, pour abréger,

$$m' = h(y_1 + 2y_3 + 2y_5 + \ldots + 2y_{2n-1} + y_{2n+1}),$$

$$d = \frac{y_2 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n+1}}{2}, \qquad d' = \frac{y_3 + y_{2n-1}}{2} - \frac{y_2 + y_{2n}}{2}.$$

L'erreur est plus petite que le terme complémentaire

$$hd - \tfrac{1}{3} hd',$$

et s'annule dans le cas où la courbe est une parabole du deuxième ou du troisième degré. (MANSION, M., **93**.)

(*Mansion*, **87**, 79.)

577. Si l'on prend les podaires successives d'une courbe C, les projetantes faisant un même angle α avec les tangentes, les points de ces courbes qui correspondent à un même point de C appartiennent à une spirale logarithmique. (CESARO, M., **108**.)

(*Schoentjes*, **82**, 154.)

578. Si l'on prend les podaires d'une courbe C, sous différents angles, par rapport à un même point O, les tangentes à



toutes ces podaires, en des points qui correspondent à un même point de C, sont tangentes à une parabole fixe.

(CESARO, M., **109**.)

(*Schoentjes*, **82**, 155.)

579. Généralisation de trois propriétés de la cycloïde. — Soit une courbe A*mb* rapportée à des axes rectangulaires Ax, Ay, sur lesquels b se projette en p et q. Soit mt la tangente en un point quelconque de cette ligne, t étant le point d'intersection avec Ax. Si l'on construit le parallélogramme mtAM, le lieu du sommet M est une courbe AMB, transformée de A*mb* [1]. Cela posé, si B est le point de AMB correspondant au point b de A*mb* : 1° les figures A*mbp* sont équivalentes. 2° Si ces figures tournent autour de Ax, l'anneau engendré par la première équivaut à la moitié de l'anneau engendré par la seconde. (CATALAN, M., **285**.)

(*Keelhoff*, **85**, 185.)

580. Soient A, B, C trois points d'une courbe quelconque Σ. Il existe une conique inscrite au triangle ABC et ayant pour foyer un point donné F. Si les points B et C se rapprochent indéfiniment de A, le rayon de courbure de la conique au point A tend indéfiniment vers le quadruple de celui de la courbe Σ au même point. (SERVAIS, M., **643**.)

(*Lalisse*, **92**, 49.)

DÉTERMINATION D'UNE COURBE D'APRÈS DES CONDITIONS DONNÉES.

581. Déterminer l'équation d'une ligne telle, qu'en lui menant une tangente en un point quelconque, la partie de cette tangente

---

[1] On voit que la première courbe se déduit de la seconde, comme la cycloïde est déduite du cercle. C'est pourquoi nous disons trois propriétés. (*Note de M. Catalan.*)

Si A*mb* est une circonférence tangente à Ax, la transformée AMB est une strophoïde; si la première courbe est une parabole ayant pour axe Ax, la transformée est une seconde parabole. (*Note de M. Neuberg.*)

comprise dans l'intérieur d'un angle donné, soit constamment égale à une droite donnée.

Discuter l'équation de cette ligne lorsque l'angle donné est droit. (N. A., **12**.)

(*Merlieux*, **42**, 265.)

582. On donne : 1° une droite fixe; 2° un point B sur cette droite; 3° un point fixe A. Trouver une courbe telle, qu'en menant par un point quelconque pris sur cette courbe une tangente, et par le point A une parallèle à cette tangente, ces deux droites interceptent sur la droite fixe deux segments, comptés du point B, tels, que la somme des carrés de ces segments soit égale à un carré donné K^2. Mêmes données, mais prenant la différence des carrés; ou bien le produit des segments, ou bien la somme des inverses des segments égale à une constante donnée.

(N. A., **498**.)

(*Rabeau, Cremona*, **60**, 154, 269.)

583. C'est une propriété des coniques, que les sommets des angles droits circonscrits à ces courbes appartiennent à une circonférence : trouver les courbes qui ont la même propriété.

(Kiepert, N. A., **1049**.)

(*Bourguet*, **73**, 328, 571; **78**, 144.)

584. Recherche des lignes telles que la corde qui sous-tend leurs intersections avec les côtés d'un angle droit pivotant sur un point fixe enveloppe un cercle autour de ce point.

On sait que l'ellipse, rapportée à son centre, forme un cas particulier de cette catégorie de courbes.

(Haton de la Goupillière, N. A., **1250**.)

(*Moreau*, **78**, 141.)

***585**. Trouver une courbe plane, telle que le produit des distances d'un point fixe à deux de ses tangentes parallèles soit constant.

Les coniques à centre sont des cas particuliers.

(Barbarin, N. A., **1551**.)

586. Trouver une courbe qui, tournant autour d'un point fixe, rencontre une droite fixe sous un angle constant (courbe théorique des cisailles à tôle). (BROCARD, N. C., **308**.)

(*Bombled,* **79**, 54.)

587. Trouver la courbe dans laquelle la somme de la sous-tangente et de la sous-normale soit égale au segment de l'axe des ordonnées, limité à la normale. (BROCARD, N. C., **309**.)

(**79**, 204, 236.)

588. Trouver la courbe dans laquelle la partie de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon vecteur, comprise entre les axes de coordonnées, est de longueur constante.

(AZZARELLI, N. C., **311**.)

(*Freson,* **78**, 155; **79**, 290.)

589. En chaque point C d'une courbe on mène la tangente, qui rencontre en A et B les axes de coordonnées.

Par les points C, A, B, on mène des parallèles à ces axes, et l'on détermine ainsi deux gradins CEA, BDC (*voir* N. C., **76**, 124) et une droite DE. Trouver les courbes telles, que le coefficient angulaire de DE soit une puissance $n^{\text{ième}}$ du coefficient angulaire de la tangente AB.

Étudier les cas particuliers. (BROCARD, N. C., **524**.)

(*Fauquembergue,* **80**, 185.)

590. Soient DA, BC deux droites perpendiculaires à OX; F un point de OX; MN un arc de courbe; MF la tangente menée du point F. Cette tangente rencontre DA, BC aux points A, C. On joint C au pied E de l'ordonnée du point M : la droite CE rencontre AD en un point A'. On demande pour quelle courbe MN la construction ainsi dirigée donne, chaque fois, DA' = DA.

(BROCARD, N. C., **533**.)

(*Leinekugel, Jamet,* **80**, 233, 269.)

COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES.

591. Construire la courbe donnée par l'équation polaire $\rho = \text{tang}\,\varphi$; et démontrer que la polaire de cette courbe, relativement à un cercle, est une seconde courbe égale à la première [1]. (N. A., **81**.)

(*Housel, Genocchi*, **54**, 132; **55**, 248.)

592. Construire la courbe à équation polaire

$$\rho^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

et en donner *ad libitum* l'aire [2]. (N. A., **314**.)

(*Dupain*, **58**, 315.)

593. On donne l'équation d'une courbe en coordonnées polaires $f(\rho, \omega) = 0$; considérant ω comme constante, on prend la dérivée de cette équation par rapport à ρ; on élimine ρ entre cette équation et l'équation donnée : que représente, relativement à la courbe $f(\rho, \omega) = 0$, l'équation résultant de cette élimination? Examiner en particulier le cas où l'on donne l'équation polaire d'une circonférence ou l'équation polaire d'une conique rapportée à l'un de ses foyers; expliquer les circonstances que l'on rencontre dans ces cas particuliers, et former des équations de courbes, d'ordre supérieur au second, qui présentent des circonstances analogues. (MANNHEIM, N. A., **648**.)

(*Mansion, Mannheim*, **64**, 62, 189.)

---

[1] La deuxième partie de l'énoncé est inexacte, comme le montre le très remarquable article de Genocchi (**55**, 248).

[2] L'énoncé a été reproduit textuellement, malgré le peu de clarté de la dernière partie. Du reste, l'aire ne peut s'obtenir que par les fonctions elliptiques.



594. Soit Γ la courbe qui correspond à l'équation

$$\rho = a \operatorname{tang}\omega;$$

le rayon vecteur qui part de l'origine O rencontre Γ en A, puis l'asymptote Δ (au bras correspondant à ce point A) en B. Traçons la perpendiculaire à OB, au point B. Cette droite coupe Oy en C. Soit D la projection de O sur Δ; démontrer que la tangente en A va passer par le point (autre que D) commun à la circonférence DAB et à la droite DC.

(De Longchamps, J. S., **233**.)

(*Brocard,* **90**, 273.)

595. Étant données deux courbes S et S_1 par leurs équations dans un même système de coordonnées polaires, on suppose que l'on sache construire les tangentes à ces courbes en deux points M et M_1 situés sur un même rayon vecteur; on demande d'en déduire la tangente au point M_2 situé sur le même rayon vecteur dans la courbe S_2 qui est le lieu des milieux des distances telles que MM_1 dans les deux courbes proposées. (J. M., **245**.)

(*Comandré,* **80**, 525.)

*596. Une conique variable est osculatrice à une hyperbole équilatère donnée, et son foyer fixe au centre de cette hyperbole. Démontrer que les tangentes communes aux deux courbes se coupent sur la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$, le centre de l'hyperbole étant pris pour pôle et l'axe transverse pour axe polaire.

(J. M., **371**.)

TRANSFORMATIONS.

*597. Étant donnée une conique A, trouver les transformations qui la changent en une conique B, de telle sorte que les normales à la conique A restent par la transformation normales à la conique B. Même question pour les surfaces.

(Laguerre, N. A., **546**.)

598. Soient M un point d'une courbe, et M_1 le point correspondant de sa transformée par rayons vecteurs réciproques par rapport à un point O; n, n_1 les longueurs des normales à ces deux courbes comprises entre les points M et M_1, et une perpendiculaire à OM menée par le point O; enfin ρ et ρ_1 les rayons de courbure aux points M et M_1. On aura $\frac{n}{\rho}+\frac{n_1}{\rho_1}=2$.

(NICOLAÏDÈS, N. A., **736**.)

(*Violland*, **66**, 168.)

599. Les transformations usitées en Géométrie, comme la similitude, le procédé des rayons vecteurs réciproques, etc., ont pour effet de conserver sans altération certains éléments des figures, tels que les angles, etc. Montrer que les formules suivantes sont *la forme la plus générale* de celles qui sont relatives à la sous-tangente et à la sous-normale en coordonnées rectangulaires ou en coordonnées polaires. Les quatre premières conservent ces longueurs dans une courbe quelconque, sauf un rapport fixe $\frac{m}{n}$ qui peut devenir l'unité; les quatre suivantes les changent l'une dans l'autre, sauf encore le rapport fixe $\frac{m}{n}$.

I. Conserver, sauf un rapport constant $\frac{m}{n}$:

1° La sous-tangente en coordonnées rectangulaires :

$$x = mx_1 + A,$$
$$y = By_1^n;$$

2° La sous-tangente en coordonnées polaires :

$$\theta = m\theta_1 + A, \qquad r = \frac{1}{\frac{n}{r_1} + B};$$

3° La sous-normale en coordonnées rectangulaires :

$$x = nx_1 + A, \qquad y = \sqrt{my_1^2 + B};$$

4° La sous-normale en coordonnées polaires :

$$\theta = n\theta_1 + A, \qquad r = mr_1 + B.$$

II. Changer, sauf un rapport constant $\frac{m}{n}$:

1° La sous-tangente en sous-normale (coordonnées rectangulaires) :

$$x = \frac{m}{2} y_1^2 + A, \qquad y = B e^{nx_1};$$

2° La sous-tangente en sous-normale (coordonnées polaires) :

$$\theta = mr_1 + A, \qquad r = \frac{1}{-n\theta_1 + B};$$

3° La sous-normale en sous-tangente (coordonnées rectangulaires) :

$$x = n \log y_1 + A, \qquad y = \sqrt{2mx_1 + B};$$

4° La sous-normale en sous-tangente (coordonnées polaires) :

$$\theta = -\frac{n}{r_1} + A, \qquad r = m\theta_1 + B.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **803**.)

(*Laisant*, **68**, 318.)

600. On appelle *transformations biquadratiques* toutes celles dans lesquelles à un point de chacune des deux figures conjuguées correspond un point, et à une droite, une conique ([1]). Montrer que les deux angles des asymptotes de cette conique sont toujours mesurés par la moitié des deux arcs suivant lesquels la droite divise le cercle fixe des trois points fondamentaux

---

([1]) On peut citer parmi elles les procédés indiqués par les auteurs suivants : NEWTON DE NEWHAVEN, *Mathematical Monthly*, t. III; STEINER, *Systematische Entwickelung;* TRANSON, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V (1886); H. FAURE, *Bulletin de la Société de Statistique*, etc., de l'Isère, 3e série, t. II (1870-1871); HIRST, *Proceedings of the royal Society*, volume XIV; DARBOUX, *Bulletin de la Société philomathique*, t. V; BELLAVITIS, *Nuovi saggi dell' Accademia di Padova*, t. IV; SCHIAPARELLI, *Académie de Turin*, 2e série, t. XXI. (*Note de l'auteur.*)

de la transformation. On obtient une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que la droite est extérieure à ce cercle, qu'elle le coupe ou qu'elle lui est tangente.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **1163**.)

(*Pellissier,* **77**, 37; J. S., **84**, 199.)

601. Montrer que, dans tout procédé biquadratique, la condition nécessaire et suffisante pour obtenir un cercle est de transformer un cercle mené par deux des points fondamentaux [1]. Le conjugué y passe alors lui-même. Les deux séries des centres de ces cercles forment un système en involution sur la perpendiculaire élevée au milieu de la droite qui joint ces deux points. Son centre est celui du cercle des trois points fondamentaux, et ses foyers les points où ce cercle rencontre la droite.

Lorsque l'on prend pour points fondamentaux les ombilics du plan, il suffit d'après cela de partir d'un cercle *quelconque* pour en obtenir un autre; et, en effet, ce mode spécial de transformation biquadratique n'est autre que le procédé des rayons vecteurs réciproques. (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **1164**.)

(*Pellissier,* **77**, 40; J. S., **84**, 199.)

602. Trouver un cercle par rapport auquel la cissoïde se transforme en elle-même par polaires réciproques.

(FOURET, N. A., **1337**.)

(*Fauquembergue,* **82**, 473.)

603. On considère un point m dont les coordonnées sont x et y; à ce point on fait correspondre un point M dont les coordonnées X et Y sont liées à x et y par les formules $x = X$; $yY = a^2$.

On propose d'étudier cette transformation; on établira en particulier les points suivants :

1° A une courbe f, d'ordre p, correspond également une

(1) Sauf pour le cercle des trois points fondamentaux, qui correspond à la droite de l'infini. (*Note de l'auteur.*)

courbe F, d'ordre $2p$; mais si f possède à l'infini, dans la direction Oy, un point de multiplicité K, l'ordre de F n'est plus que $2p - K$;

2° Les tangentes aux courbes f et F aux points correspondants m et M rencontrent Ox en deux points équidistants du pied de l'ordonnée;

3° Appliquer cette remarque à l'hyperbole considérée comme transformée de la droite par ce procédé et retrouver ainsi une construction bien connue;

4° Étudier les cubiques de la troisième classe

$$x^2 y = m^3,$$

en les considérant comme des transformées de la parabole; montrer en particulier que, si l'on appelle P le pied de l'ordonnée en un point M de cette cubique, et T le point de rencontre de la tangente en M avec Ox, on a

$$OT = \frac{3}{2} OP;$$

5° Déduire de cette transformation et de la théorie des asymptotes qu'une courbe algébrique ne peut pas avoir de point d'arrêt. (De Longchamps, J. S., 45.)

(*Bourgarel*, **87**, 282.)

604. On considère deux axes Ox, Oy et deux points $m(x, y)$, $M(X, Y)$ qui se correspondent de telle sorte que l'on ait

$$(1) \qquad xX = a^2, \qquad yY = b^2;$$

a, b désignant deux constantes données. Si m décrit une courbe U, le point correspondant M décrit une courbe V; les tangentes à ces courbes, aux points m, M coupent les axes, respectivement aux points p, q; P, Q.

Démontrer que l'on a

$$\frac{mp}{mq} = \frac{mP}{mQ}.$$

Déduire, de là, le tracé par points et par tangentes des courbes

qui se correspondent dans la *transformation réciproque cartésienne,* que définissent les formules (1).

Appliquer la propriété en question aux courbes représentées par l'équation

$$x^2y^2 = Ax^2 + By^2.$$ (De Longchamps, J. S., **245**.)

(*Rezeau,* **90**, 281.)

CINQUIÈME PARTIE.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

LIEUX RELATIFS A DES FIGURES RECTILIGNES.

Triangles.

605. Par un point O, donné dans un angle droit BAC, on mène une droite quelconque NP, terminée aux côtés de l'angle. On construit sur NP un triangle MNP semblable à un triangle donné. Quel est le lieu du sommet M? (N. A., **47.**)

(*Franck,* **52**, 287.)

606. Dans un triangle dont la base est donnée de grandeur et de position, et dont la différence des deux autres côtés divisée par la médiane intermédiaire est égale à $\sqrt{2}$; le sommet mobile décrit une lemniscate de Bernoulli, et qui est aussi une cassinoïde [1]. (N. A., **114.**)

(*Gufflet,* **46**, 253.)

607. Soit OMP un triangle dont le sommet fixe O est sur une droite fixe OL située dans le plan du triangle; on a

$$OP = 1, \qquad MP = \sqrt{2}$$

et

$$\cos(MOP - 2OMP) = \cos MOL;$$

[1] Cette dernière partie de la phrase constitue un pléonasme. Toute lemniscate est un cas particulier des ellipses ou ovales de Cassini.

le lieu du point M est une lemniscate et la tangente en M passe par le centre du cercle circonscrit au triangle OPM.

(J.-A. SERRET, N. A., **124**.)

(*Moutier*, **47**, 221.)

608. On donne dans le même plan un triangle ABC et une droite D; on prend sur cette droite des longueurs MN telles, que chacune soit vue du point A sous un angle droit; les droites AM, AN coupent BC en deux points m, n; le lieu de l'intersection des droites Mn, Nm est une droite et le lieu des points d'intersection des droites BM, CN, ou BN, CM est une conique.

(FAURE, N. A., **426**.)

(*Desq*, **62**, 111, **65**, 515.)

609. Soient ABC, abc deux triangles dans le même plan; q est un point variable tel, que les droites qa, qb, qc coupent respectivement les côtés BC, AC, AB en trois points qui sont en ligne droite; le lieu du point q est une ligne du troisième ordre.

(N. A., **494**.)

(*Cremona, de Jonquières*, **60**, 356, **61**, 26.)

610. Deux sommets A, B d'un triangle ABC sont supposés fixes; le troisième sommet C se déplace dans le plan du triangle, de façon que le pied de la bissectrice de l'angle A décrive une droite donnée; trouver le lieu géométrique du sommet C.

(HARKEMA, N. A., **1151**.)

(*Soubeiran*, **75**, 141.)

611. On joint les trois sommets d'un triangle ABC à un point P, et l'on prend les intersections A′, B′, C′ des lignes de jonction avec les côtés opposés; trouver le lieu du point P, de telle sorte que les perpendiculaires élevées sur les côtés aux points A′, B′, C′ se rencontrent en un même point Q. Ce lieu est une cubique, dont il est facile de déterminer seize points et trois tangentes; déterminer les asymptotes, et trouver aussi le lieu du point Q. (E. LUCAS, N. A., **1207**.)

(*Dewulf*, **76**, 550.)

612. On donne un triangle ABC et un point P. Soient respectivement α, β et γ les points où les côtés du triangle rencontrent les droites PA, PB et PC.

On suppose que ces droites menées par les points α, β et γ perpendiculairement aux côtés correspondants BC, CA et AB, se coupent en un même point M.

Déterminer : 1° le lieu décrit par le point P; 2° le lieu décrit par le point M. (LAGUERRE, N. A., **1343**.)

(*Moret-Blanc,* **81**, 520.)

613. Soit un triangle ABC. Par A menons AD, coupant BC, en C; par D, DE parallèle à AB, coupant AC en E; par E, EF parallèle à BC, coupant AD en M. Le lieu du point M, quand AD se déplace, est une parabole passant par C, tangente en A à AB, et dont l'axe est parallèle à BC. (SILLDORF, N. C., **21**.)

(*Silldorf,* **75**, 190.)

614. Trouver le lieu du centre du triangle équilatéral dont les sommets sont situés sur trois droites fixes.

(E. LUCAS, N. C., **143**.)

(*Neuberg,* **80**, 72, 219.)

615. Soient A_1, B_1, C_1 les projections d'un point M sur les côtés d'un triangle ABC et A_2, B_2, C_2 les points de rencontre de ces côtés et des droites AM, BM, CM. Trouver le lieu du point M tel que les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ soient équivalents.

(VAN AUBEL, M., **205**.)

(*Bastin,* **84**, 88.)

616. Sur une base donnée OA, on construit un triangle OAC tel que la différence des angles O et C soit constante. Chercher le lieu du point C. (BOIJE OF GENNAS, M., **361**.)

(*Jamet,* **86**, 162.)

617. Sur une base donnée AB, on construit un triangle ABC tel que l'angle $A = 2B$. Soient AD la bissectrice de l'angle CAB,

DE une parallèle à AB, rencontrant CA en E. Démontrer *géométriquement* que les points C et E décrivent des coniques dont A est un foyer. (GOB, M., 551.)

(*Laurens,* **87**, 237.)

618. Soient, dans le plan d'un triangle ABC, M et N deux points tels que les projections de M sur les droites AN, BN, CN soient les sommets d'un triangle A′B′C′ d'aire donnée K^2. Démontrer que : 1° le point N étant fixe, le lieu de M est une circonférence ; 2° le point M étant fixe, le point N décrit une sextique. (NEUBERG, M., 593.)

(*Emmerich,* **89**, 275.)

619. En un point quelconque de la base BC d'un triangle isoscèle ABC, on élève une perpendiculaire qui rencontre AC en D, AB en E. Étudier géométriquement le lieu du point de rencontre des droites BD, CD. (RUSSO, M., 640.)

(*De Bozoky,* **89**, 236.)

Polygones.

620. Trouver le lieu géométrique d'un point situé dans le plan d'un polygone régulier, et tel que le produit des distances de ce point aux sommets du polygone soit une quantité constante. (J.-A. SERRET, N. A., 130.)

(*Vannson,* **47**, 91.)

621. Quelles conditions doit remplir un quadrilatère pour que tous les rectangles circonscrits soient semblables à un rectangle donné? Quel est le lieu géométrique des centres de ces rectangles? (N. A., 303.)

(*Murent,* **55**, 365.)

622. Un quadrilatère ABCD, articulé en A, B, C, D, a, pour axe de symétrie, la diagonale AC. De plus, le côté AB est fixe.

Cela étant, le lieu du point de rencontre des côtés AD, BC est un ovale de Descartes ([1]). (CATALAN, N. C., 27.)

(*Philippin*, **76**, 89.)

623. Un quadrilatère variable OGHM se déplace et se déforme suivant les conditions ci-après :

1° Le point O est fixe;

2° La longueur OG est constante;

3° L'angle G est droit;

4° Le côté HM est à chaque instant parallèle à OG;

5° L'angle GOM varie de grandeur et de position, mais il a toujours la même bissectrice.

Trouver le lieu du sommet M. (VAZEILLE, J. S., 147.)

(**87**, 140.)

624. Un quadrilatère articulé *abcd* a son sommet *a* qui est fixe; les côtés *ab*, *ad* tournent autour de *a* d'angles égaux en sens inverse. On demande le lieu du point *c*.

(MANNHEIM, J. S., 309.)

625. Un cadre rectangulaire ABCD est suspendu contre un mur au moyen d'une corde qui passe sur un clou et dont les extrémités sont attachées aux sommets A et B. Lorsque la corde vient à glisser sur le clou, quelles sont les courbes décrites par les sommets du cadre? On suppose le centre de gravité du cadre à l'intersection des diagonales, et le poids de la corde négligeable.

(LIMBOURG, M., 390.)

(*Brocard*, **90**, 201.)

Autres générations.

626. Une droite et un segment fixe AB sont situés dans un plan quelconque; si l'on joint un point quelconque P du plan

---

([1]) *Voir* N. C., question 229.

aux extrémités A et B du segment, les lignes PA et PB déterminent sur la droite la perspective A′B′ du segment. Quelle courbe doit décrire le point P pour que cette perspective conserve toujours la même longueur? (HARKEMA, N. A., 1044.)

(**71**, 555.)

627. Une droite AB de longueur constante s'appuie sur deux axes rectangulaires OX, OY : lieu du point M de cette droite, tel que l'on ait

$$MA.AO = MB.BO$$ (GAMBEY, N. A., 1269.)

(*Fauquembergue,* **78**, 560.)

628. Deux droites g, g', contenant deux séries homographiques de points A, B, C, D, ... et A′, B′, C′, D′, ..., sont données. Les droites AA′, BB′, CC′, DD′, ... enveloppent une conique; quel est le lieu des milieux de ces droites?

(DROZ, N. A., 1336.)

(*Moret-Blanc,* **80**, 556.)

629. Six points quelconques étant donnés sur un plan, le lieu géométrique des points tels qu'en les joignant aux six points donnés on obtienne un faisceau en involution se compose de quinze cubiques du troisième ordre qui passent toutes par les six points donnés. (DEWULF, N. A., 1347.)

(*Goffart,* **81**, 428.)

***630.** Trouver le lieu géométrique des points d'où l'on voit sous le même angle deux segments donnés de deux droites fixes.

Cas où les deux droites sont rectangulaires.

(FAUQUEMBERGUE, N. A., 1491.)

***631.** Soient X′X une droite horizontale indéfinie, A et B deux points pris sur cette droite et C un point pris au-dessous, de manière que sa projection sur X′X tombe entre A et B. n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dont les masses respectives sont $m_1, m_2, \ldots, m_n$

parcourent la ligne brisée X′ACBX, de telle sorte que leur ordre de succession reste le même et que les projections sur X′X de leurs distances mutuelles restent constantes. On demande de trouver : 1° le lieu du centre de gravité de ce système de points; 2° la position du système pour laquelle le centre de gravité est le plus bas. (Rouché, N. A., **1600**.)

632. Soit AOB un angle donné, coupé par deux transversales AB, A′B′, parallèles à une direction fixe, de telle sorte que l'aire du trapèze ABA′B′ soit constante. Démontrer que les lieux des milieux des diagonales AB′, A′B sont deux hyperboles conjuguées. (Laisant, N. C., **55**.)

(*Habbé,* **76**, 158.)

633. Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY et une droite AB, qui les rencontre au point A, B; on projette le point O en C, sur AB, et l'on construit, avec des parallèles aux axes, menées par A, B, C, les projections F, G de C, sur les axes, et les gradins BDC, CEA.

1° Le coefficient angulaire de DE est le cube du coefficient angulaire de BA;

2° Les droites FG, BA, DE se rencontrent en un même point;

3° Quel est le lieu de ce point, lorsque la distance CO reste constante? (Brocard, N. C., **63**.)

(*Catalan, Laisant,* **76**, 124, 311) [1].

***634**. On donne deux segments AB, CD, situés sur une même ligne droite. Trouver le lieu des points d'où les angles sous lesquels on voit les deux segments forment une somme constante. (Brocard, N. C., **241**.)

***635**. Étant donné un système articulé, composé de trois tiges consécutives CA, AA_1, A_1C_1, telles que $CA = C_1A_1$, $AA_1 = \frac{1}{4}CA$, $CC_1 = \frac{1}{3}(CA + AA_1 + A_1C_1)$; trouver le lieu du point M, milieu de AA_1. (Tchebychef, N. C., **332**.)

---

[1] Généralisation.

636. Le sommet A d'un angle droit rigide se déplace sur l'axe OX. Un côté AC passe toujours par un point C de l'axe OY perpendiculaire à OX, et l'autre côté AB est de longueur constante. On demande le lieu des points d'intersection M de AC avec OB. (BROCARD, N. C., **354**, **432**.)

(*Laisant*, **79**, 23.)

637. On donne une droite fixe DC et deux points fixes O, A. Du point O, l'on mène diverses droites OB sur lesquelles on rabat BA en BM, BM'.

Trouver le lieu des points M, M'. Examiner les cas particuliers. (BROCARD, N. C., **398**.)

(*Jamet*, **79**, 242.)

638. Un système articulé, composé de deux côtés opposés AB, CD d'un carré, et de la diagonale AD, est mobile autour des sommets B, C, considérés comme pivots fixes. Démontrer que le milieu M de la diagonale mobile décrit une lemniscate de Bernoulli. (CARBONNELLE, N. C., **480**.)

(*Cauret*, **79**, 249.)

639. Une droite AB, de longueur donnée l, se meut entre deux axes rectangulaires OX, OY. On construit le rectangle AOBC, et l'on projette C en D sur AB. Trouver le lieu du point de rencontre de AB avec la symétrique de la droite OD par rapport à la bissectrice de l'angle XOY, et en déterminer la tangente, le rayon de courbure, etc. (FALISSE, M., **517**.)

(*Brocard*, **90**, 165.)

640. On donne trois points, A, B, C, dans un plan. Autour du point A, on fait tourner un angle de grandeur constante, dont les côtés rencontrent en M et N une droite fixe donnée; on demande le lieu décrit par le point de rencontre des lignes BM et CN lorsque l'angle donné tourne autour du point A. Étudier les propriétés de ce lieu. (J. M., **330**.)

641. On considère deux points fixes O et O', et une droite Δ perpendiculaire à OO' au point A; soit M un point quelconque

de Δ; on mène MO et MO′; puis à la droite MO′ on élève au point O′ une perpendiculaire qui rencontre OM au point M′; on pose alors $M'O' = x$, $MO' = y$, et l'on considère un point I qui a pour coordonnées x et y, par rapport à un angle droit donné YOX. Trouver le lieu décrit par ce point quand M se meut sur Δ, et discuter les différentes formes du lieu quand on donne à A toutes les positions possibles sur OO′. Démontrer que la courbe est unicursale. (De Longchamps, J. S., **34**.)

(*Forest*, **83**, 10.)

642. La question étant posée dans les mêmes termes que dans la question précédente, mais en supposant cette fois que Δ est parallèle à OO′, trouver le lieu du point I; on distinguera les différentes formes du lieu suivant que le cercle décrit sur OO′ comme diamètre est extérieur, tangent ou sécant à la droite Δ. On propose aussi de reconnaître que la courbe trouvée est une courbe du sixième degré unicursale.

(De Longchamps, J. S., **35**.)

(**83**, 33.)

643. On donne un point fixe O et une droite fixe AB; pour chaque point P de AB on prend, normalement à AB, $PM = \lambda.OP$, λ étant une constante. Quel est le lieu du point M, et quel est le problème simple de Géométrie descriptive que l'on peut regarder comme l'origine du problème actuel? (Vazeille, J. S., **91**.)

(*Fesquet*, **84**, 280.)

LIEUX RELATIFS A DES FIGURES CIRCULAIRES.

Un cercle.

644. Si sur la diagonale d'un rectangle comme corde on décrit un cercle, le lieu des extrémités d'un diamètre parallèle à l'autre diagonale est une hyperbole équilatère. (Kupper, N. A., **470**.)

(*Decharme*, **59**, 280.)

645. Par un point A d'une circonférence OA, on mène une corde AC. On projette le point C en D, sur le rayon OA, et l'on joint D à l'extrémité E du rayon OE perpendiculaire à OA.

Trouver le lieu du point M où DE rencontre AC.

(BROCARD, N. C., **100**.)

(*Freson,* **77**, 386; **78**, 48.)

***646.** D'un point A pris sur un diamètre d'une circonférence, on mène diverses droites AB. On projette le point B de la courbe en C, sur le diamètre OA; puis, du point B comme centre, avec BC pour rayon, on décrit un arc de cercle. Trouver le lieu des points M d'intersection de cet arc avec AB.

(BROCARD, N. C., **401**.)

647. Soient O un point d'une circonférence, OB le diamètre, OA une corde. On projette A en C sur OB, C en D sur OA, D en M sur AC. Trouver : 1° l'équation de la courbe lieu du point M; 2° la quadrature de cette courbe.

(BROCARD, N. C., **510**, M., **204**.)

(*Fauquembergue,* N. C., **80**, 91, 121, 213; *Bastin,* M., **83**, 116, 191; **85**, 227.)

648. Étant donnée une circonférence AMBN de diamètre AB, on projette chaque corde MN, perpendiculaire à AB, en PQ sur un diamètre CD, parallèle à MN. Le lieu des points m, n, intersections des droites AP, AQ avec MN est une courbe fermée dont l'aire est égale à celle de la circonférence. Si l'on prend, au lieu de la circonférence, une courbe quelconque ayant un axe de symétrie CD, on en déduit, par le procédé indiqué ici, une autre courbe de même aire. (MISTER, M., **35**.)

(*Brocard,* **81**, 128.)

649. On donne un angle droit YOX et un cercle dont le centre C est sur la bissectrice de l'angle YOX. D'un point quelconque A de la circonférence, on mène une perpendiculaire sur OX; soit A

le point où cette perpendiculaire rencontre la droite symétrique de OA par rapport à OC. Chercher le lieu de A'.

(De Rocquigny, M., **404**.)

(*Falisse,* **85**, 260.)

650. On donne une circonférence C, un point O sur cette ligne et deux directions fixes. Par un point quelconque M de C, on trace les cordes MA, MB parallèles aux directions fixes; trouver le lieu du point P où se coupent les droites MO, AB. Déterminer la tangente en ce point, les asymptotes et démontrer que les asymptotes forment un triangle équilatéral. Les parallèles aux asymptotes menées par O rencontrent la circonférence en trois points R_1, R_2, R_3. Démontrer que les trois hyperboles qui ont leurs asymptotes parallèles aux deux directions fixes données et qui sont osculatrices à la circonférence en R_1, R_2, R_3 se coupent en O. (Dewulf, M. **417**.)

(*Le Cointe,* **86**, 183; **89**, 144; **90**, 57.)

651. Soient C un point fixe d'une corde BD d'un cercle ω, A un point quelconque de la circonférence. 1° Trouver le lieu du point de rencontre M des hauteurs du triangle ABC; 2° examiner les cas où ce lieu est une cissoïde ou une strophoïde; 3° on obtient différentes courbes, lorsque le point C se déplace sur BD; démontrer que les tangentes à ces courbes aux points qui correspondent à un même point A du cercle ω se coupent en un même point N; 4° le lieu de N est une cardioïde.

(Jerabek, M., **439**.)

(*Jerabek,* **91**, 70.)

652. On donne une circonférence Δ, un point fixe O et un axe fixe OX. Soit M un point quelconque de Δ. 1° Soit N un point tel que

$$\text{angle NOX} = \tfrac{1}{2}\,\text{MOX}, \qquad \text{ON} = \sqrt{a.\text{OM}},$$

a étant une constante; démontrer que N décrit un ovale de Cassini.

2° Le lieu du point P tel que

$$\text{angle POX} = 2\text{MOX}, \qquad \text{OP} = \frac{\overline{\text{OM}}^2}{a}$$

est un ovale de Descartes. (LAISANT, M., **628.**)

(*Déprez,* **90**, 64.)

653. Étant donné un cercle O, on abaisse d'un point M de sa circonférence une perpendiculaire MP sur un rayon fixe OA, puis on prolonge PM de $MN = n.OP$. 1° Le lieu de N est une ellipse; 2° trouver les axes de cette courbe; 3° construire la tangente en N. (KEELHOFF, M., **689.**)

(*Laisant,* **91**, 74.)

654. On donne une droite AB, une circonférence C, et une droite CDP, sur laquelle on prend deux points fixes, D et P. Par le point P, on mène, arbitrairement, une transversale qui coupe en E la droite AB, en F et G la circonférence C. On joint E à D, F et G à C, par les droites DE, CF, CG qui se coupent en M, M′. Le lieu des points M, M′ est une conique, dont on demande la discussion. (CATALAN, M., **729.**)

(*Laisant,* **92**, 27.)

655. Étant donnée une circonférence O, on prolonge un rayon OM de la longueur $MN = n.MP$, où MP est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité M du rayon sur un diamètre fixe AA′. 1° Démontrer que le lieu du point N est un limaçon de Pascal; 2° trouver l'aire de la courbe; 3° trouver la longueur de la courbe dans le cas de $n = 1$. (KEELHOFF, M., **730.**)

(*Belleus,* **92**, 144.)

***656.** On donne un cercle Δ et un diamètre OC de ce cercle; d'un point A, pris sur la circonférence, on abaisse sur OC la perpendiculaire AB, et l'on considère le triangle OAB : 1° On demande le lieu des centres des cercles tangents aux droites OA, AB, OB; 2° le lieu se compose de deux quartiques unicursales;

considérant l'une d'entre elles, on demande de distinguer sur cette courbe, formée de deux boucles égales, les points qui appartiennent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits du triangle AOB; 3° déterminer le cercle qui, ayant pour centre le point O, est bitangent à la courbe; 4° trouver l'aire totale de la courbe. (DE LONGCHAMPS, J. S., **49**.)

657. On considère un cercle Δ, et l'on prend sur la circonférence un point mobile M. Ayant joint ce point aux extrémités d'un diamètre fixe AB, du point M on abaisse sur AB une perpendiculaire MP; le cercle décrit de M comme centre avec MP pour rayon rencontre MA en A′ et MB en B′. Le lieu décrit par le point de rencontre de MP et de A′B′ est une courbe du douzième degré, qui se décompose en deux courbes du sixième degré. On montrera que, si AB est l'axe des x, l'équation peut se résoudre par rapport à y, et l'on donnera la forme générale de cette courbe, qui est unicursale. (DE LONGCHAMPS, J. S., **89**.)

(*Bieules*, **84**, 235.)

658. On considère un cercle de rayon variable et de centre fixe O et une droite fixe xOy qui coupe le cercle en deux points A et B. On porte de A vers O, sur xy, une longueur constante $AC = l$. Par le point C, on mène une droite inclinée à 45° sur OA; elle coupe le cercle en P, Q. Lieu de ces deux points. (TROILLE, J. S., **210**.)

(*Delbourg*, **90**, 20.)

Un cercle, et triangles.

659. 1° Si par deux points M, N, pris sur la circonférence circonscrite à un triangle, on mène les droites faisant avec les côtés du triangle des angles α égaux et de même orientation, les deux transversales qui joignent respectivement les trois sommets d'angles issus de M, et les trois sommets d'angles issus de N, se coupent en un point P sous un angle constant.

2° Déterminer le lieu des points P, quand on fait varier l'angle α. (TERRIER, N. A., **1263**.)

(*Moret-Blanc,* **79**, 374.)

660. Dans un cercle de rayon R, on inscrit un triangle ABC, dont le sommet A est fixe et dont les côtés a, b, c remplissent la condition

$$b^2 + c^2 - a^2 = k^2,$$

k étant une longueur donnée, inférieure à $2R\sqrt{2}$; et l'on demande :

1° Le lieu du milieu ou côté BC; 2° le lieu du pied de la hauteur issue du sommet A; 3° le lieu du point de concours des hauteurs; 4° le lieu du centre de gravité; 5° le lieu du centre du cercle des neuf points; 6° le maximum et minimum, s'il y a lieu, de la surface du triangle; 7° le lieu des pieds des hauteurs issues des sommets B et C; 8° de démontrer que le côté BC est tangent à une ellipse ou à une hyperbole fixe, et que les hauteurs issues des points B et C sont tangentes à une même parabole. (JAMET, M., **148**) (1).

(*Liénard,* **83**, 227.)

661. Une corde AB, de longueur donnée, se meut dans un cercle. On en joint les extrémités à un point fixe quelconque P. Trouver les lieux décrits par les points suivants : 1° le centre du cercle circonscrit au triangle PAB; 2° le centre du cercle inscrit; 3° le point de concours des hauteurs; 4° le pied des hauteurs. (DE ROCQUIGNY, M., **521**.)

(*Verniory,* **90**, 255.)

662. Le sommet A de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC est fixe, le sommet B décrit une droite ou une circonfé-

(1) Toutes ces questions se déduisent de la première et l'on démontre aisément que la somme des carrés des distances du milieu de BC au point A et au centre du cercle est constante.

(*Note de M. Jamet.*)



rence, et l'hypoténuse est parallèle à une droite donnée. Trouver le lieu du sommet C. (DE ROCQUIGNY, M., **535**.)

(*Minoliti*, **88**, 258.)

663. On considère tous les triangles qui ont un sommet fixe A, et les deux autres sommets B, C sur une droite donnée; la longueur BC est également donnée. Trouver les lieux géométriques du centre du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.
(DÉPREZ, M., **620**.)

(*François*, **89**, 255.)

664. On considère un cercle Δ, de centre O, rapporté à deux diamètres rectangulaires. Sur OX, on prend un point fixe P; et par P on mène une transversale mobile qui coupe Δ aux points A et B. On propose de trouver le lieu décrit par le point I, centre des hauteurs du triangle AOB.

Ce lieu est une cubique Γ, unicursale, passant par les ombilics du plan.

En posant $OP = d$, et en désignant par R le rayon de Δ, on examinera les deux cas particuliers suivants :

1° $$d = R,$$

2° $$d = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

On trouve, dans le premier cas, une strophoïde et, dans le second cas, une cissoïde. Expliquer ces résultats par des considérations géométriques. Revenant au cas général et observant que I et le pôle de AB sont deux points symétriques par rapport à AB, on propose de construire la tangente à Γ, au point I, en s'appuyant sur les propriétés des transversales réciproques.
(DE LONGCHAMPS, J. S., **174**) [1].

(*Ropert*, **88**, 141.)

---

[1] *Voir* un article de M. d'Ocagne, J. S., **85**, 267.

Un cercle, et tangentes.

*665. On donne une circonférence dont le centre est O, et une droite *d*. On a sur cette droite deux divisions homographiques, dont A et A′ sont deux points correspondants. Par A et A′ on mène des tangentes à la circonférence; elles se coupent en quatre points dont on demande le lieu géométrique.

Construire la courbe dans le cas particulier où le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite *d* est le point milieu des deux points doubles imaginaires des divisions homographiques.

Cas particuliers où les divisions sont en involution et ont leurs points doubles imaginaires. (Dewulf, N. A., **1267**.)

666. On donne une circonférence, un rayon fixe OA, et une tangente mobile BC, ayant C pour point de contact. On projette C en D sur OA, D en M sur CB, M en D′ sur OA, D′ en M′ sur CB, etc. On demande : 1° le lieu des points M, M′, M″, ... ainsi obtenus; 2° les propriétés communes à ces courbes.

(Brocard, N. C., **108**, M., **293**.)

(*Molenbroeck*, M., **89**, 82.)

667. On donne une circonférence OBD, un diamètre fixe D′OBD, une tangente parallèle CI dont le point de contact soit C. On projette chaque point A de la courbe, en B sur OD, puis le point B en M, sur CA. Trouver le lieu du point M.

(Brocard, N. C., **397**.)

(*Fauquembergue*, **80**, 267.)

***668.** On donne une circonférence, rapportée à deux axes rectangulaires OX, OY, et un point A sur OX. Du point A, l'on mène des sécantes ABC; puis on construit les tangentes aux points d'intersection B, C, et l'on projette, sur ces tangentes, le point de rencontre D de ABC avec OY. Trouver le lieu des points M ainsi obtenus. Indiquer toutes les formes de la courbe.

(Brocard, N. C., **400**.)

669. Sur une circonférence donnée O, on prend deux points fixes A, B et un point mobile M; on marque les milieux A', B' des arcs MA, MB, et on tire la corde A'B'. Trouver : 1° le lieu de la projection de M sur A'B; 2° le lieu du point où A'B' coupe la tangente menée par M. (BARBARIN, M., **334**.)

(*Jerabek*, **88**, 229.)

670. On donne une circonférence O et la tangente AT au point A. Une tangente mobile touche la circonférence en B et rencontre AT en C. Trouver le lieu du point de rencontre du rayon OB avec la parallèle à OA menée par C (par le calcul et la Géométrie). (FALISSE, M., **496**.)

(*Mineur*, **86**, 213.)

671. En un point quelconque M d'un quadrant de cercle AB, on mène une tangente, rencontrant le rayon OA en N. On élève sur OA la perpendiculaire NT = NM, et l'on joint AT, MT. Démontrer : 1° que MT passe par un point fixe; 2° que le lieu de T est une hyperbole équilatère (théorème connu); 3° que le point d'intersection des droites NM et AT se meut sur une hyperbole.

(DE ROCQUIGNY, M., **660**.)

(*Brocard*, **89**, 260.)

672. On considère deux droites rectangulaires ox et oy, et un cercle C tangent à l'axe ox au point P'. Soit P' le symétrique de P par rapport à l'origine. Par ce point P', on mène une transversale L, qui rencontre C en deux points A et B. On joint alors le point P au point A, et à cette droite on élève en ce point P une perpendiculaire qui rencontre L en un point I. Trouver le lieu du point I quand L tourne autour de P'. Ce lieu est une cissoïde oblique ayant pour point de rebroussement le point P. On propose enfin de démontrer ce résultat par la Géométrie.

(DE LONGCHAMPS, J. S., **24**.)

(*Ferval*, **88**, 44.)

673. On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy; sur Ox un point fixe P; sur Oy, un autre point fixe Q. Du

point O comme centre, avec un rayon supposé variable, on décrit un cercle C, et, des points P et Q, on mène des tangentes au cercle C; ces tangentes se coupent en des points dont on demande le lieu géométrique. (DE LONGCHAMPS, J. S., **42**.)

(*Pornay,* **83**, 69, 95) [1].

674. On donne une circonférence fixe O et une droite fixe AB. Sur chaque tangente à la circonférence on prend le point M, de telle sorte que le point de contact P soit le milieu du segment QM limité d'un côté au point M, et de l'autre côté à la droite fixe AB. Quel est le lieu du point M? On examinera en particulier le cas où la droite AB est tangente à la circonférence, et le cas particulier où la droite AB est un diamètre de la circonférence. (VAZEILLE, J. S., **92**.)

(*Bourgarel,* **87**, 22.)

675. On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy et un point fixe A; de l'origine O comme centre, avec un rayon variable, on décrit une circonférence Δ, à laquelle on mène par A deux tangentes qui coupent les axes aux points P, Q, P', Q'. Cela posé, on joint QP' et PQ'; ces droites se coupent en un point A'. Trouver le lieu de ce point. On expliquera par des considérations géométriques, le résultat, en apparence singulier, auquel a conduit le calcul.

(DE LONGCHAMPS, J. S., **149**.)

(*Giat,* **87**, 285.)

676. Mener, à une circonférence fixe, une tangente Δ telle que le segment AA' intercepté sur cette droite, par deux droites fixes D, D', ait une longueur donnée.

A propos de ce problème, généralisation de celui de Pappus, on cherchera le lieu du point M obtenu en traçant par A une parallèle à D', et par A' une parallèle à D.

Ce lieu est une quartique. On déterminera les formes diverses

---

[1] Généralisation.

affectées par cette courbe. Enfin on fera voir que le problème se résout complètement par le tracé d'ellipses et d'hyperboles. (J. S., **221**.)

(*Rezeau*, **91**, 91.)

677. Trouver le lieu du centre de gravité des points d'intersection d'une tangente variable à un cercle avec les diagonales d'un hexagone régulier inscrit à ce cercle. (D'Ocagne, J. S., **241**.)

(*Rezeau*, **90**, 278.)

678. On donne deux droites rectangulaires, Ox, Oy. Par l'origine O, on fait passer une circonférence Γ de rayon invariable. Soient Δ, Δ' deux droites parallèles aux axes et tangentes à Γ. La droite qui joint le point O au point de concours des droites Δ, Δ' coupe Γ en un certain point I, dont on demande le lieu géométrique. (De Longchamps, J. S., **305**.)

(*J. Dewulf*, **92**, 45.)

Deux cercles fixes.

679. Donner une discussion complète du lieu géométrique d'un point tel, que si de là on mène les tangentes à deux cercles égaux donnés, leur rectangle soit constant. Ce lieu comprend, comme cas particuliers, l'ellipse de Cassini, ainsi que les courbes, lieux géométriques des projections orthogonales du centre d'une section conique sur ses tangentes. (Strebor, N. A., **177**.)

(*Legallais*, **48**, 126, 171.)

680. On donne deux cercles tels, que l'on puisse construire un triangle inscrit à l'un et circonscrit à l'autre; on sait qu'il existe alors une infinité de triangles satisfaisant à cette condition; le lieu des points de rencontre des hauteurs de tous ces triangles est une circonférence ayant pour rayon l'excès du rayon du cercle circonscrit sur le diamètre du cercle inscrit. (Salmon, N. A., **527**.)

(*Mention*, **61**, 96.)

681. Soient deux cercles égaux dans le même plan; P un point variable duquel on mène des tangentes aux cercles et dont le produit est constant. Le lieu de ce point est la podaire du centre d'une ellipse. (N. A., 533) (¹).

(*Plissart*, **64**, 223.)

682. On donne sur un plan deux circonférences (O) et (O′). D'un point fixe A de la première on mène une droite ABC qui coupe cette circonférence de nouveau au point B et la circonférence (O′) au point C; on porte le segment BC de A en M sur la droite AB : on demande le lieu décrit par le point M, lorsque la droite AB tourne autour du point A. (MANNHEIM, N. A., 721.)

(*Kaher-Bey*, **67**, 515.)

683. Soient deux cercles fixes C et C′ tangents aux droites D et D′; on considère un cercle variable K qui touche C et C′ et on lui mène des tangentes parallèles à D et D′ : trouver le lieu de leur point de rencontre. (LAGUERRE, N. A., 1387.)

(*Chateau*, **83**, 133, 136.)

684. Étant donnés deux cercles A, B; si le centre de A se trouve sur B, tout point invariablement lié à une droite dont la longueur est le rayon de A, et dont les extrémités s'appuient sur les circonférences A, B, décrit une podaire de section conique.

(S. ROBERTS, N. C., 191.)

(*Mennesson*, **78**, 211.)

685. Soient c, c', d les rayons et la distance des centres de deux cercles :

1° Le lieu des points d'où l'on peut mener à ces cercles quatre tangentes, formant un faisceau harmonique, est une conique

(¹) Énoncé trop général. La propriété n'est vraie que dans un cas particulier. *Voir* la solution de M. Plissart.

passant par les huit points de contact des tangentes communes.

2° Cette conique se réduit à deux droites si

$$c^2 + c'^2 = \frac{d^2}{2}.$$ (CAYLEY, N. C., 256.)

(*Van Aubel*, **77**, 359.)

686. (*a*) Le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés sont tangents à deux circonférences données se compose de plusieurs limaçons de Pascal.

(*b*) Pendant le mouvement de l'angle constant, un point quelconque décrit, sur le plan des deux cercles, un limaçon de Pascal; une droite quelconque est toujours tangente à une certaine circonférence (ou, comme on dit, enveloppe une circonférence).

(*c*) Un point quelconque du plan fixe des deux cercles trace sur le plan mobile une ellipse.

(*d*) Si l'on considère une position quelconque de l'angle mobile, la circonférence qui passe par le sommet de cet angle et par les points de contact de ses côtés avec les circonférences données contient les pôles des limaçons de Pascal du lieu précédemment énoncé. Le lieu des centres de ces circonférences se compose de deux circonférences [1]. (MANNHEIM, M., 2.)

(*Clevers*, **81**, 43, 66.)

687. On donne deux circonférences concentriques C, C′ et un point O sur la première. Une droite variable menée par le centre rencontre C en A, C′ en A′. Trouver 1° l'équation du lieu

[1] Limaçon de Pascal. Si, par un point A pris sur une circonférence, on mène une sécante quelconque AD, sur laquelle, à partir du point D où elle rencontre le cercle, on porte, de part et d'autre, une longueur donnée DM ou DN, le lieu des points M et N est une courbe appelée limaçon de Pascal. *Voir* la démonstration, par la Géométrie élémentaire, des propriétés de cette courbe, dans Briot et Bouquet, *Géométrie analytique*, n°s 30, 32, 36, 38.

(*Note de la Rédaction.*)

de la projection P de A sur la droite OA′; 2° l'aire de cette courbe (P); 3° la tangente au point P. (BROCARD, M., 374.)

(*Derousseau*, **87**, 250.)

688. On donne deux cercles de même centre O. Par un point fixe A du cercle extérieur, on mène une sécante quelconque, rencontrant le cercle intérieur en N, N′ et le cercle extérieur en P. Trouver le lieu du point M où la droite ON coupe la tangente menée en P au cercle extérieur. (MANDART, M., 749.)

689. Du centre d'un cercle on abaisse des perpendiculaires OT sur les tangentes à un autre cercle, et sur chacune d'elles on prend, à partir du point T et de part et d'autre de la tangente, des longueurs égales $TP = TP'$ telles que l'on ait $OP.OP' = k^2$. Trouver le lieu des points P et P′. (J. M., 233.)

(*Boulogne*, **81**, 424.)

690. Deux cercles étant donnés, et ω étant un centre de similitude inverse, une droite AC tourne autour de ω; on mène les tangentes en A et C, qui ne sont pas des points homologues, trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

(J. M., 392.)

(*Pigeaud, J. E.*, **82**, 46.)

Deux cercles, dont un au moins variable.

691. Un cercle mobile a son centre sur une droite fixe et touche un cercle fixe; quel est le lieu du pôle d'une seconde droite fixe relativement à ce cercle mobile? que devient ce lieu, lorsque le cercle fixe se réduit à un point ou devient une droite?

(N. A., 74.)

(*Vidal*, **43**, 499.)

692. Étant donnés une droite et un point, on mène par le point deux cercles tangents à la droite et se coupant sous un angle donné, puis la seconde tangente commune à ces deux

cercles. Le lieu du point symétrique du point donné par rapport à cette tangente décrit un limaçon de Pascal, qui a pour l'un de ses foyers le point donné. L'autre foyer est le point symétrique du point donné par rapport à la droite donnée.

(Faure, N. A., **1076**.)

(*Moret-Blanc*, **74**, 156.)

693. Deux droites de même longueur OA, OB et un point P sont donnés; une droite mobile passant par le point P coupe OA en a et OB en b. On décrit deux cercles ayant pour centres a et b, et qui passent respectivement par A et B : trouver le lieu géométrique des points communs à ces deux cercles.

(Droz, N. A., **1286**.)

(*Terrier*, **78**, 523.)

694. Étant données deux droites fixes, on considère deux cercles de même rayon, tangents entre eux, et touchant chacun une des deux droites.

Le point commun à l'un des cercles et à la droite correspondante étant fixe, on demande le lieu du point de contact des deux cercles, lorsqu'on fait varier leur rayon.

(D'Ocagne, N. A., **1497**.)

(*Moret-Blanc*, **84**, 542.)

695. Étant donnés un cercle fixe et une droite tournant autour d'un point fixe, on considère un cercle de rayon constant tangent au cercle et à la droite; on demande le lieu du point de contact de ce cercle et de la droite. (D'Ocagne, N. A., **1550**.)

(*Brocard*, **91**, 12*.)

696. Soient C, D deux points fixes divisant le diamètre AB du cercle O en parties harmoniques. Par C, D on fait passer un cercle quelconque O′. Trouver les lieux des points où la tangente menée en C au cercle O′ est rencontrée par la corde MN commune aux cercles O, O′, par la droite MD, ou par la tangente en M à l'un ou l'autre cercle. (Gob, M., **539**.)

(*Boedt*, **88**, 99.)

697. Si A, B sont des points fixes, P, Q des points variables de la droite AB, mais tels que PQ est de grandeur constante, deux cercles décrits des centres P, Q et passant respectivement par A, B se rencontrent en un point R, dont le lieu est une ellipse. (GENESE, M., **636**.)

(*De Bozoky*, **90**, 18.)

698. On donne une droite terminée aux points P et Q; soit R un point pris sur PQ; du point P comme centre avec PR pour rayon, on décrit un cercle, et du point Q avec QR, un autre cercle; on mène une tangente commune à ces cercles, et l'on demande de démontrer que le lieu décrit par les points de contact est l'ensemble de deux quartiques.

(DE LONGCHAMPS, J. S., **43**.)

(*Callé*, **83**, 284, 285.)

699. On donne dans le plan une droite fixe DD′ et deux points fixes O et A. Par le point O on mène deux cercles tangents tous deux à la droite fixe DD′ et à une droite quelconque issue du point fixe A. On demande d'étudier le lieu décrit par le second point M d'intersection de ces deux cercles quand la droite AB tourne autour du point A. (J. S., **99**.)

(*Fesquet*, **87**, 211.)

700. On donne une circonférence fixe dont le centre est C, et un point O dans son plan. Par le point O on mène une tangente OA au cercle C. Par un point B pris sur cette droite OA on mène une perpendiculaire à OA, et une parallèle BD à la droite OC, D désignant l'un des points où cette parallèle rencontre le cercle C. Enfin du point O comme centre, avec OD pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe en M et M′ la perpendiculaire élevée à OA en B. On demande d'étudier le lieu des points M et M′ quand le point B se déplace sur la tangente OA.

(J. S., **100**.)

(**86**, 114.)

Plus de deux cercles.

701. Par un point P, on mène à un cercle C une sécante PMN : trouver le lieu géométrique de l'intersection de deux circonférences passant, l'une par les points P et N, l'autre par les points P, M et toutes deux tangentes à la circonférence C.

(CALLANDREAU, N. A., **1054**.)

(*Pellissier*, **72**, 458.)

702. Soit une série de cercles concentriques. Dans chacun d'eux on trace un rayon OM qui détache un secteur AOM d'aire donnée, à partir d'une droite fixe AOX passant par le centre O : trouver le lieu du point M. (LAISANT, N. A., **1320**, N. C., **151**.)

(*Fauquembergue*, N. A., **80**, 460; *Freson*, N. C., **77**, 87.)

703. Trouver le lieu d'un point M tel, que la somme de ses puissances, par rapport à n circonférences données, croisse proportionnellement : 1° aux accroissements des arcs de la courbe parcourue par M; 2° aux accroissements des carrés des mêmes arcs. (LAISANT, N. C., **54**.)

(*Laisant*, **79**, 209.)

704. Le lieu des centres des cercles qui touchent une circonférence donnée O et divisent une autre circonférence donnée O en deux parties égales est une conique dont un des foyers est au point O. (JAMET, M., **136**.)

(*Derousseaux*, **82**, 222.)

705. Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes communes à une circonférence fixe de rayon a, et à un système de circonférences de rayon b, passant par un point fixe A de la première. (BROCARD, M., **329**.)

(*De Rocquigny*, **84**, 211.)

706. D'un point quelconque A de l'axe radical de deux cercles O, O', on mène à ceux-ci respectivement les tangentes AB, AB'. Trouver le lieu du centre du cercle passant par A, B, B'.

(DE ROCQUIGNY, M. **405**.)

(*Brocard*, **88**, 45.)

707. On donne deux circonférences O, O'. Une troisième O'', variable, touche les précédentes en A, A'. Menons la droite OA qui rencontre O'' en un nouveau point B. Le lieu du conjugué harmonique de O par rapport à AB est un limaçon de Pascal.

(GOB, M., **540**.)

(*Mandart*, **87**, 235.)

708. Trouver le lieu du point de contact de deux séries de circonférences, les unes tangentes à deux droites rectangulaires OX, OY, les autres tangentes à OX en un point fixe A.

(BROCARD, M., **684**.)

(*Déprez*, **91**, 120.)

709. On considère un cercle M, un diamètre fixe AB, et la tangente CC' à l'extrémité B de ce diamètre; par le point A on mène une transversale qui rencontre le cercle en D, et la bissectrice de l'angle DAB, qui rencontre en H la tangente CC'; soit O le centre du cercle inscrit au triangle ADB, et Δ une droite perpendiculaire à AO en ce point O; cette droite Δ rencontre le cercle décrit de B comme centre avec BH pour rayon en deux points. Démontrer que le lieu géométrique décrit par l'un de ces points est une droite, le diamètre AB; l'autre point décrit une strophoïde. On démontrera cette double propriété par le calcul et par la Géométrie. (DE LONGCHAMPS, J. S., **1**.)

(*Griffon*, **83**, 58.)

710. On considère un cercle C rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox, Oy. Soient A, A' deux tangentes parallèles fixes, et PMQ une tangente mobile, ayant M pour point de contact et rencontrant A en P, A' en Q; 1° sur MP et MQ comme

diamètres on décrit des cercles; le lieu décrit par le centre de similitude de ces circonférences est une quartique unicursale; 2° soit B le point de contact de A avec C; la droite BM rencontre le cercle décrit sur PQ comme diamètre en des points dont le lieu est une cubique. (DE LONGCHAMPS, J. S., **85**.)

(*Martin,* **87**, 114.)

711. Construire le lieu des pieds des normales menées d'un point fixe S, à la suite des circonférences qui touchent deux droites fixes données. Examiner : 1° le cas particulier où le point fixe S est sur l'une des deux droites données; 2° le cas où le point S est également distant des deux droites données; 3° le cas où le point S se transporte à l'infini dans une direction donnée. (VAZEILLE, J. S., **90**.)

(*Fesquet,* **89**, 282.)

712. Étant donnés, dans un plan, deux droites et un point fixe, on fait tourner une droite autour de ce point. Trouver le lieu des points de contact, situés sur cette droite, des circonférences tangentes aux deux droites fixes données et à la droite mobile. (LEBON, J. S., **224**.)

(*Delbourg,* **90**, 212.)

LIEUX RELATIFS A UNE CONIQUE DÉTERMINÉE.

—

Une ellipse, et tangentes.

713. Désignons par F le foyer d'une ellipse donnée.

En un point quelconque M de cette courbe menons la tangente MT qui coupe le petit axe en T; soit Q la projection du point T sur le rayon vecteur MF; on demande le lieu des points tels que Q, lorsque M décrit l'ellipse donnée.

(MANNHEIM, N. A., **614**.)

(*Schnée, Lebasteur,* **62**, 172, 174, 316, 317; **64**, 385.)

714. Sur toutes les tangentes à une ellipse, et à partir de leurs points de contact, on porte une longueur constante : on demande l'équation du lieu des extrémités de ces droites. Examiner la forme du lieu représenté par cette équation, et expliquer les circonstances particulières que l'on rencontre lorsque la longueur constante se réduit à zéro. (MOUTARD, N. A., **647**.)

(*Autos*, **63**, 387.)

715. On donne une ellipse de centre O. Prenons un point m de cette courbe et appelons μ le centre de courbure de l'ellipse correspondant à m. Menons la droite μO et désignons par t le point où elle rencontre la tangente en m à l'ellipse. On demande :

1° Quel est le lieu décrit par t lorsque m parcourt l'ellipse;

2° De démontrer que la tangente en t à ce lieu rencontre $m\mu$ en un point r tel que $mr = \frac{m\mu}{2}$. (MANNHEIM, N. A., **1235**.)

(*Moret-Blanc*, **78**, 328.)

***716.** Une ellipse de grandeur invariable (demi-axes a et b) se déplace de façon à rester tangente à une droite donnée en un point donné; démontrer que le lieu géométrique du centre de cette ellipse est une courbe fermée du quatrième degré, dont l'aire a pour expression

$$\frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$ (BARISIEN, N. A., **1549**.)

717. On sait que le lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse des tangentes faisant entre elles un angle donné est une courbe du quatrième degré. Démontrer que, si d'un point quelconque de cette courbe on abaisse les quatre normales à l'ellipse, (réelles ou imaginaires), et si N_1, N_2, N_3, N_4 sont les distances du point aux pieds des normales, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 les rayons de courbure correspondant aux pieds des normales, on a la relation

$$\frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}{N_1N_2N_3N_4} = \text{const.}$$ (BARISIEN, N. A., **1587**.)

(*Bosi*, **91**, 25*.)

718. Une ellipse, dont les axes sont connus, tourne dans son plan autour de son centre. Dans chacune de ses positions, on lui mène des tangentes aux points où elle est coupée par deux droites rectangulaires fixes, menées par ce centre. Quel est le lieu des points de rencontre de ces tangentes? On considère, en outre, les cordes de contact ainsi déterminées dans l'ellipse, et l'on demande le lieu de leurs intersections successives.

(N. C., **338**.)

719. Soient OACB le rectangle déterminé par les axes d'une ellipse (indéfiniment prolongés) et une tangente AMB, prise comme diagonale. Si l'on joint le sommet C au point de contact M, et si, du centre O, l'on abaisse OP perpendiculaire à CM, la droite OP passe par le centre de courbure relatif au point M. (De Longchamps, N. C., **548**) (¹).

(*De Longchamps,* **80**, 223, 246, 331.)

***720.** D'après la construction indiquée dans la question précédente, quel est le lieu du point P? (Catalan, N. C., **549**.)

721. On donne une ellipse; on prend le triangle *acb*, formé par les deux tangentes *ca*, *cb* à cette courbe et la corde de contact *ab*, et l'on détermine un point *m* d'où l'on voit, sous des angles droits, les côtés du triangle *abc*. Quel est le lieu des points tels que *m*, lorsqu'on prend tous les triangles analogues à *acb*? (Mannheim, N. C., **595**) (²).

722. On projette chaque point d'une ellipse sur la tangente menée au point diamétralement opposé. Lieu de cette projection. (Neuberg, M. **266**.)

(*Keelhoff,* **86**, 16.)

(¹) Cette question est placée ici, à cause de sa connexité avec celle qui suit, bien qu'elle ne concerne pas les lieux géométriques.

(²) Nous avons reproduit textuellement l'énoncé; mais il semble manquer de clarté à plusieurs points de vue. Peut-être y a-t-il eu des erreurs d'impression dans la N. C. C'est sans doute à cette obscurité qu'il faut attribuer l'absence de solution.

723. Un disque elliptique se déplace en restant toujours tangent à une droite fixe OX en un point donné O. Quel est le lieu géométrique du centre de courbure de l'ellipse au point où la courbe est rencontrée par la normale OY?

(Brocard, M., **691**.)

(*Jamet*, **91**, 198.)

***724.** On considère une ellipse Γ et la tangente Δ en un sommet A, extrémité du grand axe de cette courbe; on trace une tangente mobile Δ', puis une seconde tangente Δ'' parallèle à celle-ci. La droite Δ'' rencontre Δ en un point M et l'on projette enfin M sur Δ'. Soit I cette projection. On propose de trouver le lieu décrit par I. Ce lieu est une courbe du cinquième ordre ayant sur l'axe AA' deux points doubles; l'un d'eux est réel, l'autre imaginaire. On discutera la forme générale de la courbe qui correspond à l'équation trouvée. On fera voir notamment qu'elle est renfermée tout entière entre les droites

$$(x + a = 0, \ x - 3a = 0)$$

et qu'elle est doublement tangente au cercle qui est circonscrit au rectangle formé par l'axe Oy, la droite Δ et les parallèles à Ox menées par les sommets B et B'. (De Longchamps, J. S. **165**.)

725. Étant donnée une ellipse de foyers F et F', trouver le lieu décrit par un point P tel qu'en menant, de ce point, les tangentes à l'ellipse ayant leurs points de contact en M, M', les droites MF et M'F' se rencontrent sur l'ellipse. Montrer que ce lieu se compose des deux directrices de l'ellipse donnée et d'une ellipse.

Le lieu du point de rencontre des droites MF' et M'F est aussi une ellipse. (Barisien, J. S., **326**.)

Une ellipse, et normales.

726. Lieu du sommet d'un angle droit, dont les côtés sont normaux à une ellipse donnée. (N. A., **43**.)

(*Vidal*, **43**, 365.)

727. A partir de l'origine P d'une normale quelconque à une ellipse, on porte de part et d'autre sur cette normale deux longueurs égales PN_1, PN_2 telles, que le produit de PN_1 ou de PN_2 par la distance du centre à la tangente adjacente à la normale soit constant; les lieux des points N_1, N_2 sont deux ellipses confocales de même centre que l'ellipse donnée.

(HEILERMANN, N. A., **518**.)

(*Prat*, **60**, 237.)

728. Par un point A d'une ellipse donnée, on mène deux cordes AB, AC également inclinées sur la normale en ce point : démontrer que la droite BC, qui unit les extrémités de ces cordes, passe par un point dont la position est indépendante de leur inclinaison sur la normale, et déterminer la ligne que ce point décrit lorsque le point A parcourt l'ellipse donnée.

(DELORME, N. A., **671**.)

(*De Saint-Michel*, **63**, 540.)

729. On donne une ellipse, trouver : 1° le lieu des milieux des cordes normales; 2° le lieu des pôles de ces normales; 3° la corde normale minimum; 4° la corde normale qui détache le plus petit segment. (COLLINS, N. A., **849**.)

(*Paillotte*, **68**, 519.)

730. Par les différents points m d'une ellipse on mène des normales à la courbe, et sur chacune de ces droites on prend à partir du point m et des deux côtés de ce point des segments mM, mM' égaux au demi-diamètre conjugué de celui qui passe en m; démontrer que les lieux géométriques des points M, M' sont des circonférences concentriques à l'ellipse dont les rayons sont respectivement égaux à la somme et à la différence des demi-axes de la courbe. (BRUNO, N. A., **1212**.)

(*Barthe*, **76**, 381.)

***731.** Trouver le lieu des points tels que les quatre normales menées de ces points à une ellipse donnée forment un faisceau harmonique. (MIRMAN, N. A., **1541**.)

*732. D'un point M du plan d'une ellipse, on mène à cette courbe les quatre normales MN_1, MN_2, MN_3, MN_4 et les deux tangentes MT_1 et MT_2; trouver le lieu du point tel que l'expression

$$\frac{MN_1.MN_2.MN_3.MN_4}{MT_1.MT_2}$$

ait une valeur constante donnée l^2. (BARISIEN, N. A., 1573.)

733. On considère tous les points du plan d'une ellipse d'où l'on peut mener à cette courbe deux normales simples et une normale double, et l'on demande le lieu du pôle de la corde qui joint le pied de la normale double au pied d'une normale simple.
(CHAMBON, N. A., 1574.)

(*Renon*, **92**, 1*.)

*734. Une ellipse, dont le centre est C, tourne, dans son plan, autour de son foyer F. Elle coupe, en D, une droite fixe FX. Sur la normale, en P, on porte une longueur PN, égale au demi-diamètre conjugué à CP. Le lieu du point N est une circonférence.
(N. C., 421.)

735. Une ellipse, dont le centre est C, tourne dans son plan autour de son foyer F. Elle coupe en D une droite fixe FX. Sur la normale en D on porte une longueur DN égale au demi-diamètre conjugué avec CD; le lieu de N est une circonférence.
(M., 581.)

(*Stuyvaert*, **90**, 148.)

736. On considère une ellipse et deux normales à cette courbe faisant entre elles un angle droit. Soit M le point de rencontre de ces deux normales. Par ce point M on mène à l'ellipse les deux autres normales, dont les pieds sont A et B. En A et B, on mène les tangentes à l'ellipse. Trouver le lieu du point P de rencontre de ces tangentes, quand le point M décrit le lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à l'ellipse donnée. (J. M., 329.)

(*Du Motel*, **81**, 561.

737. Par un point P (α, β), extérieur à une ellipse, on mène les deux tangentes PA et PB à cette ellipse. Par le point I, intersection des normales menées en A et B, on mène les deux autres normales IC et ID; enfin, aux points C et D, qui sont les pieds sur la courbe de ces deux dernières normales, on mène les tangentes CM, DM, qui se rencontrent en M. On demande : 1° d'exprimer les coordonnées du point M en fonction de celles du point P; 2° de trouver l'équation du lieu du point M, quand le point P se déplace de façon que les premières normales AI et BI fassent entre elles un angle droit. (J. M., **395**.)

(*Boulogne,* J. S., **82**, 117; **83**, 281.)

738. Sur une ellipse E, on considère un point mobile M. Abstraction faite de la normale en M, on peut, de ce point, mener à l'ellipse considérée trois autres normales. Prenons deux de ces droites MA, MB; les tangentes aux points A et B, pieds de ces normales, se coupent en I. Démontrer que le lieu de I est une ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée. (De Longchamps, J. S., **183**.)

(*Brocard,* **89**, 142, 240.)

Une ellipse ; autres générations.

739. Étant donnée une ellipse, on lui circonscrit un triangle dont les hauteurs passent par les points de contact des côtés correspondants. Trouver le lieu des sommets de ce triangle.

(N. A., **970, 1028**.)

(*Bourguet, Poujade,* **73**, 577; **74**, 153, 576; **77**, 185; **81**, 321; **84**, 144.)

740. Une ellipse de grandeur constante est mobile autour de son centre, tandis qu'une droite passant par un point fixe demeure constamment parallèle au grand axe. Trouver le lieu des points d'intersection de la droite et de l'ellipse.

(Guébhard, N. A., **980**.)

(*Sanguinède,* **72**, 228.)

741. Trouver le lieu des pôles des cordes communes et la podaire du centre relative à l'enveloppe des cordes communes à une ellipse et à son cercle osculateur en chacun de ses points.

(DESMONS, N. A., **1089.**)

(*Moret-Blanc,* **73**, 36.)

742. Lorsque les médianes d'un triangle inscrit dans une ellipse se coupent au centre de la courbe, le lieu du point de concours des hauteurs de ce triangle est une ellipse tangente à la développée. (POUJADE, N. A., **1173.**)

(*Michel,* **75**, 468; **76**, 326; N. C., **78**, 45.)

743. I. Par l'un des foyers F d'une ellipse, on mène une corde AFB et l'on joint ses extrémités à l'autre foyer f. Étudier la variation de l'aire du triangle AfB ainsi formé. — II. Lorsque la distance focale de l'ellipse est plus grande que le petit axe, il y a deux positions de la corde ABF qui correspondent à des maximums de l'aire du triangle. On demande le lieu des extrémités de la corde placée dans une de ces positions, quand l'ellipse varie de manière que le foyer F et la directrice correspondante soient fixes. — III. Généraliser les questions précédentes en remplaçant le foyer f par un point quelconque du grand axe.

(JAMET, M., **138.**)

(*Pisani,* **83**, 42.)

744. On projette un point quelconque M d'une ellipse sur la bissectrice de l'angle formé par le rayon OM avec le grand axe OA. Trouver l'aire de la courbe, lieu de cette projection.

(NEUBERG, M., **265.**)

(*Gillet,* **86**, 65.)

745. On joint un point fixe M d'une ellipse à deux points variables P, Q pris sur le grand axe à égale distance d'un point donné N; les droites MP, MQ rencontrent l'ellipse en P′ et Q′. On propose : 1° de démontrer que la droite P′Q′ passe par un

point fixe R; 2° de trouver le lieu décrit par R, lorsque M parcourt l'ellipse donnée. (NEUBERG, M., **445**.)

(*Mosnat*, **88**, 47.)

746. Soit GH une corde quelconque d'une ellipse, parallèle au demi-diamètre OC. Les circonférences décrites des points G et H comme centres, avec un rayon égal à OC, se coupent en deux points R, R'. Démontrer que le lieu des points R, R' se compose de deux diamètres symétriques par rapport à un axe de l'ellipse. (CATALAN, M., **609**.)

(*Droz*, **89**, 122.)

747. Les rayons vecteurs MF, MF' d'un point d'une ellipse rencontrent la courbe une seconde fois en P, P'. Trouver : 1° le lieu du pôle de la corde PP'; 2° le lieu du point de rencontre de la corde PP' avec la tangente menée en M; 3° le lieu du point de rencontre des perpendiculaires élevées en F sur FM, et en F' sur F'M. (BROCARD, M., **687**.)

(*Déprez*, **90**, 261.)

748. On considère une ellipse E, et sur le grand axe AA' quatre points fixes P, P'; Q, Q'; O étant le centre de E, on suppose

$$OP = OP' = d,$$
$$OQ = OQ' = d'.$$

Ceci posé, on prend sur E un point mobile M, et l'on joint M aux quatre points fixes. Ces droites rencontrent l'ellipse en des points C, C'; D, D'; les droites CD, C'D', se coupent en un point I dont on demande le lieu géométrique. Ce lieu est l'ensemble de deux coniques. (DE LONGCHAMPS, J. S., **131**.)

(*Martin*, **88**, 214.)

749. On considère une ellipse E; par les foyers F, F' on mène deux rayons mobiles, parallèles et dirigés dans le même sens. Ces droites rencontrent E aux points A, A'; par A on trace une

droite perpendiculaire à FA′ et rencontrant celle-ci au point I. Trouver le lieu décrit par ces points; distinguer les différentes formes affectées par les courbes, lieu de I. (J. S., **181**.)

(*Leinekugel*, **90**, 229.)

Une hyperbole.

750. Une hyperbole étant donnée, sur son axe réel, comme diamètre, on décrit une circonférence. Par un point quelconque P, pris sur cette circonférence, on lui mène une tangente, qui rencontre l'hyperbole en deux points Q, R.

Trouver : 1° le lieu du point qui, sur la corde QR, est le conjugué harmonique du point P; 2° le lieu du milieu de cette même corde QR.

On construira le second lieu géométrique, dans le cas particulier où l'hyperbole est équilatère. (N. C., **418**.)

(*Jamet*, **79**, 130.)

751. On considère une hyperbole rapportée à ses axes :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

sur l'axe Oy, on considère les points B et B′ qui sont à une distance b de l'origine et on les joint à un point M, mobile sur l'hyperbole. La perpendiculaire à B′M au point B′ rencontre BM′ en un point I, dont on demande le lieu géométrique. Ce lieu est une quartique; on demande de la construire et d'indiquer les différentes formes de la courbe suivant que l'on a

$$b < a, \; b = a, \; b > a. \quad \text{(De Longchamps, J. S., 9.)}$$

(*Toqué*, **82**, 82.)

752. Soit H une hyperbole; une droite mobile tangente à H rencontre ses asymptotes en deux points A et B que l'on projette en A′ et B′ sur l'axe non transverse de la courbe; sur A′B

comme diamètre on décrit un cercle Δ et l'on prend, par rapport à Δ, le pôle I de AB.

Trouver le lieu de I; ce lieu est l'axe transverse de H.

(De Longchamps, J. S., **182**.)

(*Balitrand,* **90**, 93.)

Une parabole.

753. Par le foyer d'une parabole, on mène un rayon vecteur quelconque et une perpendiculaire à ce rayon; puis, sur ces deux droites comme côtés, et avec la normale au point pris sur la parabole, comme diagonale, on construit un rectangle.

Quel est le lieu du sommet opposé au foyer? (N. A., **44**.)

(*Faure,* **44**, 365; **63**, 97, 100; **66**, 21, 27.)

754. On sait que le cercle osculateur en un point quelconque A d'une parabole coupe cette courbe en un second point B; démontrer : 1° que la droite AB et toutes les droites analogues sont tangentes à une même parabole; 2° que le lieu géométrique des milieux des cordes telles que AB est une parabole.

(N. A., **644**.)

(*Haag,* **63**, 415, 418.)

755. Trouver le lieu géométrique d'un point tel que la somme des carrés des trois normales menées de ce point à une parabole donnée soit égale à un carré donné K^2. (N. A., **709**.)

(*Recoq,* **65**, 112.)

756. Par un point pris sur la développée de la parabole, on mène les normales à la parabole. Par ce point et les pieds des normales, on fait passer un cercle. Lieu décrit par le centre de ce cercle, lorsque le point décrit la développée.

(Paillotte, N. A., **924**.)

(*Millasseau,* **69**, 323; **70**, 32.)

757. Étant donnés une parabole et un cercle passant par le

foyer et coupant la parabole en quatre points, trouver le lieu des milieux des tangentes communes.

(Olga Ermanska, N. A., **954**.)

758. Par un point A extérieur à une parabole, on mène deux tangentes à la courbe et, aux points de contact, des normales qui se coupent en un point B. Quel doit être le lieu du point A pour que celui du point B soit : 1° une droite ; 2° un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole? (Androusski, N. A., **1139**.)

(*Quet,* **75**, 185.)

759. Une droite SA pivote autour du sommet S d'une parabole qu'elle rencontre en A, et de ce point A on abaisse une perpendiculaire AP sur la tangente au sommet.

1° On joint le point P au pied D de la directrice par une droite qui rencontre AS en M.

2° On joint le point P au foyer F par une droite qui rencontre AS en S;

3° On abaisse de P sur AS une perpendiculaire qui coupe AS au point Q, et l'on prolonge PQ d'une quantité égale QR.

Démontrer que :

Le point M décrit une hyperbole;

Le point N, une ellipse;

Le point Q, un cercle;

Et le point R, une strophoïde. (Guillet, N. A., **1332**.)

(*Robaglia,* **80**, 468.)

760. La normale en M à une parabole rencontre cette courbe en un second point N, et son axe en P. Par le point Q, milieu de MN, on mène une parallèle à l'axe de la parabole, et du point M on abaisse la perpendiculaire MR sur cette droite :

1° Démontrer que PR est perpendiculaire à MN;

2° Trouver le lieu géométrique du point R lorsque le point M se déplace sur la parabole. (Chambon, N. A., **1425**.)

(*Chambon,* **83**, 331.)



761. Mener par un point donné une droite telle que le segment intercepté par une parabole donnée soit maximum ou minimum. Le problème admet trois solutions. Trouver le lieu des points du plan pour lesquels deux des solutions se confondent : ce lieu, du quatrième degré, partage le plan en deux régions; discuter le problème lorsque le point donné est dans l'une ou l'autre de ces régions. (J. S., 3.)

(*Kœhler,* **83**, 132.)

762. Trouver le lieu des points M tel que, parmi les normales issues de ce point à la parabole

$$y^2 - 2px = 0,$$

il y en ait deux qui forment avec la droite

$$y = x \operatorname{tang} \varphi$$

un triangle isoscèle. Ce lieu est une parabole; construire cette courbe lorsque l'on suppose $\varphi = \frac{\pi}{8}$, et montrer que le sommet coïncide avec le foyer de la parabole donnée.

(DE LONGCHAMPS, J. S., 15.)

(*Devin,* **82**, 205.)

763. Une parabole de forme invariable glisse entre deux droites rectangulaires Ox, Oy; trouver le lieu décrit par l'extrémité du diamètre qui passe par l'origine. La courbe est du huitième degré; mais elle peut se mettre, en coordonnées polaires, sous la forme remarquable

$$\frac{p}{\rho} = 1 - \cos 4\omega.$$

Déduire de cette équation les points d'inflexion que présentent les quatre branches de la courbe. (DE LONGCHAMPS, J. S. 125.)

(*Ferval,* **87**, 138, 236.)

764. Soient AB et A'B' deux cordes normales à une parabole et rectangulaires. On construit un point M dont les coordonnées sont respectivement égales à AB et A'B'. Trouver le lieu décrit par M quand le point A parcourt la parabole donnée. Ce lieu est une courbe du huitième ordre, unicursale; elle correspond en coordonnées polaires à l'équation

$$\rho = \frac{2p}{\sin^2 2\omega},$$

p désignant le paramètre de la parabole.

(De Longchamps, J. S., 176.)

(*Albert*, **88**, 287.)

765. D'un point M on peut mener à une parabole donnée trois normales; trouver le lieu du point pour lequel les pieds de ces normales forment un triangle d'aire donnée. (J. S., 236.)

(*Largier*, **90**, 275; **91**, 45.)

LIEUX RELATIFS A UNE CONIQUE EN GÉNÉRAL.

Une conique, et tangentes.

766. 1° On fait tourner l'angle O de manière que ses côtés soient toujours tangents à une section conique; quel est le lieu décrit par un point quelconque du plan de l'angle?

2° On fait tourner une section conique de sorte qu'elle touche constamment les deux côtés d'un angle O; quel est le lieu décrit par un point de la courbe?

Indiquer une équation qui puisse résoudre à la fois les deux questions; faire des applications à des cas particuliers.

(Le Besgue, N. A., 77.)

(*Rispal*, **44**, 226.)

767. Soient donnés dans un même plan : 1° un quadrilatère ABCD et un point fixe S sur le côté AB ; 2° deux faisceaux homographiques ayant le point S pour centre commun. Menons une droite quelconque, elle coupera les deux faisceaux en deux systèmes de points homographiques ; soient a_p, b_p deux de ces points homographiques. Dans le pentagone formé par le quadrilatère et le rayon Sa_p, inscrivons une conique ; par le point b_p menons deux tangentes à cette conique. Le lieu géométrique de l'intersection de ces deux tangentes par le rayon Sa_p est une ligne du troisième ordre passant par le point S et par les trois sommets du triangle formé par le côté CD opposé à AB et par les côtés CA, DB suffisamment prolongés.

(CHASLES, N. A., **306**.)

(*De Jonquières*, **55**, 318.)

768. Par un point fixe M pris sur une conique, on mène une tangente ; soient T un point quelconque pris sur cette conique, TN une seconde tangente et N le point de contact ; au point T on élève une perpendiculaire sur la tangente TN ; elle sera rencontrée en R par la perpendiculaire abaissée de N sur la tangente fixe TM. Quel est le lieu du point R ? (N. A., **501**.)

(*Desq*, **66**, 134.)

769. On donne une conique ; quel est dans le plan de cette conique le lieu d'un point tel, que les deux tangentes menées de ce point à la conique et la corde de contact forment un triangle ayant un périmètre donné ? Déterminer *directement* une construction *géométrique* de la tangente en un point quelconque de ce lieu. (MANNHEIM, N. A., **552**.)

(**73**, 401.)

770. Trouver le lieu d'un point M tel que le triangle formé par les tangentes issues de ce point à une conique et par la corde des contacts ait une aire constante. (N. A., **1012**.)

(*Moret-Blanc*, **74**, 244.)

771. En chaque point d'une conique, on mène un diamètre et la normale. Trouver le lieu de l'intersection de ce diamètre et de la tangente à l'autre extrémité de la corde normale.

(FAUQUEMBERGUE, N. A., **1399**; M., **256**.)

(*Moret-Blanc,* N. A., **83**, 471; *Falisse,* M., **86**, 87.)

772. Sur chaque tangente d'une conique, on prend un point situé à une distance t de l'ordonnée correspondant à la tangente. Trouver le lieu de ces points, c'est-à-dire la courbe tangentielle de la section conique. (HOCHHEIM, N. C., **243**.)

773. On donne une conique K, une droite d et un point O sur cette droite. Soient A, B deux points variables pris sur d et tels que le produit OA.OB ait une valeur constante. Trouver le lieu des sommets du quadrilatère que forment les tangentes menées par A et B à la conique K. (M., **734**.)

(*Déprez,* **92**, 30.)

774. 1° Étant donnés une conique et deux points A, B, dans son plan, les points de contact des tangentes à cette conique, menées par les deux points A, B, sont sur une deuxième conique S, passant aussi par les deux points A, B. A quelle condition la conique S est-elle une hyperbole équilatère?

2° Démontrer qu'après avoir choisi le point A, on peut trouver comme il suit un point B remplissant la condition indiquée ci-dessus. Du point A on trace deux droites quelconques et par le pôle de chacune d'elles on mène une perpendiculaire à l'autre. Ces deux droites se coupent au point cherché B.

3° Le point A étant fixe, et les deux droites dont il vient d'être question tournant autour du point A, quel est le lieu du point B?

(JAMET, M., **743**.)

775. Étant donnée une conique tangente en deux points fixes A et B aux deux côtés d'un angle fixe, on mène à cette conique une troisième tangente variable terminée en C et D aux côtés de l'angle donné; par les points C et D, on mène des parallèles aux

deux côtés de l'angle; on demande le lieu des points d'intersection de ces parallèles quand la troisième tangente prend toutes les positions possibles. (*On pourra employer les coordonnées trilinéaires pour résoudre ce problème.*) (J. M., 357.)

(*Boulogne,* J. S., **82**, 92.)

776. On donne une conique Γ et un point fixe P : trouver le lieu décrit par le sommet A d'un triangle ABC circonscrit à Γ, sachant que les droites qui joignent les points A, B, C aux points de contact des côtés opposés concourent en P. (J. S., 175.)

(*Le Roux,* **88**, 286.)

***777.** I. On donne un point P, une droite A′B′ et une conique Σ. Une transversale, tournant autour du point P, coupe la droite en un point Q, et la conique en deux points R, R′. Si l'on prend les points doubles de l'involution déterminée sur la transversale par les deux couples de points P, Q et R, R′, le lieu de ces points doubles est une conique Σ′.

II. On donne une droite, une conique Γ et deux divisions homographiques sur cette conique.

Les tangentes à la conique, en deux points homologues A, A′, rencontrent la droite en deux points; les droites qui joignent ces deux derniers points aux pôles de la droite des points doubles, coupent la corde AA′ en des points dont le lieu est une conique.

Quand la droite donnée est tangente à Γ, le lieu est un système de deux droites. (Tarry, J. S., 273.)

Autres générations.

778. Par un point fixe donné dans le plan d'une conique passe une sécante mobile; trouver le lieu géométrique du point d'intersection des deux normales menées à la conique aux deux points où la sécante coupe la conique. Quel est le lieu lorsque le point fixe est un foyer? (N. A., 443.)

(*Terquem, de Jonquières,* **59**, 77, 261, 406; **60**, 47.)

779. On circonscrit à un triangle quelconque une courbe du second degré telle que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point. On demande de prouver que le lieu de ce point est une courbe à centre du troisième ordre. Déterminer cette courbe.

Lieu du pied de la quatrième normale.

(Darboux, N. A., **752**.)

(*Biny*, **66**, 420; **67**, 510; **68**, 46.)

780. Par un point P pris dans le plan d'une conique, on mène une sécante qui coupe en A la courbe, et en B un certain diamètre fixe. Par les points A et B, on mène des parallèles au diamètre et à la direction conjuguée : on demande le lieu de leurs points d'intersection.

Cas particulier. — La conique est un cercle, et le point fixe est pris sur une tangente. Forme de la courbe.

(Guébhard, N. A., **962**.)

(*Burtaire*, **71**, 427.)

781. Un triangle ABC étant donné, on mène d'un point P aux côtés BC, CA, AB des parallèles qui rencontrent respectivement AB, BC, CA en A', B', C'.

1° Pour que les trois points A', B', C' soient en ligne droite, il faut que P se trouve sur une conique déterminée.

2° A un point P de cette conique correspondent deux droites A'B'C'; quel est le lieu de leur point de rencontre quand le point P parcourt la conique?

Cas particulier du triangle ABC équilatéral.

(Poujade, N. A., **1419**.)

782. Le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits à une conique donnée est une seconde conique, qui se décompose en deux droites, lorsque la courbe donnée est une hyperbole dont les asymptotes font entre elles un angle de 60°.

(Neuberg, N. C., **351**; J. M., **343**.)

(*Goulard*, J. S., **82**, 65.)

783. Des différents points d'une droite AB, on abaisse des perpendiculaires sur les polaires de ces points par rapport à une conique. Le lieu des pieds de ces perpendiculaires est le même que celui des points de contact des tangentes menées du pôle de AB aux coniques homofocales de la première. Dans quel cas ce lieu se réduit-il à une conique ou à une droite?

(MILLER, M., **15**.)

(*Pisani,* **81**, 145.)

784. Trouver le lieu géométrique du point qui divise dans un rapport constant K la normale à une conique, limitée de part et d'autre à la courbe. (M. **583**.)

(*Déprez,* **89**, 253.)

785. Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique quatre normales formant un faisceau harmonique.

(VAZEILLE, J. S., 33) (1).

(*Barthe,* **86**, 260.)

786. Deux sommets opposés d'un quadrilatère complet restant fixes, deux autres, non opposés, décrivant une conique, et l'un des deux sommets restants décrivant une ligne droite, on demande le lieu du sixième sommet (c'est une conique).

Si la droite donnée est parallèle à la polaire de l'un des deux sommets fixes par rapport à la conique donnée; si, de plus, elle se trouve à égale distance de ce sommet et de cette polaire, les deux coniques seront homothétiques. Le démontrer géométriquement.

Questions analogues, la conique donnée étant remplacée par une quadrique, et la droite donnée par un plan.

(TISSOT, J. S., **276**.)

(*J.-G. Darboux,* **91**, 136.)

---

(1) *Voir* ci-dessus, question n° 731.

LIEUX RELATIFS A UNE CONIQUE ET A DES CERCLES.

—

Une conique, un cercle.

*787. On donne un triangle et la circonférence qui lui est circonscrite. Tangentiellement en m à cette courbe, on décrit une conique tangente aux trois côtés du triangle donné. Soit μ le centre de courbure de cette conique correspondant au point m : on demande le lieu du point μ lorsque m décrit la circonférence donnée. (Mannheim, N. A., 1382.)

*788. Étant donnés une parabole et un cercle de rayon R, décrit du foyer comme centre, on mène à ce cercle une tangente quelconque : trouver le lieu des intersections des normales à la parabole, menées aux points de rencontre de la courbe avec cette tangente.

Discuter ce lieu dans le cas particulier où le cercle est tangent à la parabole. (N. C., 337.)

789. Le centre d'une circonférence se meut sur une parabole. Trouver le lieu des points de contact des tangentes à ces circonférences, menées d'un point fixe, pris sur l'axe de la parabole.

(Brocard, N. C., 399; M. 292.)

(*Pisani*, M., **85**, 36.)

790. On donne une conique et deux points fixes A et B sur cette conique. Une circonférence quelconque, passant par les deux points A et B, rencontre la conique en deux autres points C et D. On mène les deux droites AC et BD qui se coupent en M, les droites AD et BC qui se coupent en N.

Déterminer : 1° le lieu des points M et N; 2° le lieu des points de rencontre de la droite MN avec la circonférence à laquelle elle correspond.

Construire les deux lieux. (N. C., 419.)

(*Brocard*, **79**, 62.)

791. Étant donnée une parabole, on mène une corde AB normale à son extrémité A. La circonférence décrite sur AB comme diamètre coupe la courbe en un autre point C. Trouver :

1° Le lieu du point d'intersection de la tangente en C à la parabole, avec la tangente en A, et avec la tangente en B; 2° le lieu de la projection de C sur AB. (BARBARIN, M., **210**.)

(*Bastin*, **84**, 225, 236.)

792. A un cercle donné, on inscrit une suite de rectangles dont les côtés ont des directions données. Trouver le lieu du pôle d'une droite donnée, par rapport à une conique circonscrite à l'un de ces rectangles et semblable à une conique donnée.

(BROCARD, M., **514**.)

(*Verniory*, **87**, 52.)

793. Sur une corde AB de l'ellipse comme diamètre, on décrit un cercle qui coupe l'ellipse en deux autres points C et D. On demande le lieu des points M où les sécantes communes AB et CD se rencontrent, lorsque AB se meut parallèlement à elle-même. (J. M., **310**.)

(*Rouhard*, **81**, 558.)

***794.** On donne une parabole P, et un point $M(\alpha, \beta)$ dans son plan. Par ce point supposé fixe, on fait tourner une droite Δ, qui rencontre P en A et B, et l'axe de la parabole au point C. Par les points A et B, on fait passer un cercle qui touche en D la tangente au sommet de la parabole. La droite CD rencontre le cercle en un second point E que l'on joint au centre du cercle, ce qui donne une droite Δ'. Démontrer que le lieu des points de rencontre de Δ et de Δ' est une parabole quand Δ tourne autour de M; on expliquera les résultats par des considérations purement géométriques. (DE LONGCHAMPS, J. S., **11**.)

795. On considère une ellipse rapportée à ses axes AA', BB'. D'un point C, pris sur l'axe Oy, avec $CA = CA'$ pour rayon, on décrit un cercle Δ, A et A' désignant les extrémités du grand axe.

1° Soit M un point mobile sur Δ; par ce point M on mène à l'ellipse des tangentes. La droite qui joint les points de contact rencontre Δ en deux points P et Q, et les tangentes en P et Q à Δ se rencontrent en un point I, dont on demande le lieu géométrique quand M parcourt la circonférence.

2° Ce lieu est une conique N, dont on demande de déterminer le genre d'après la position de C sur Oy.

3° Construire cette conique en supposant $a^2 = 3b^2$, et en admettant que C coïncide avec B.

4° La tangente en A au cercle rencontre N en deux points, P′ et Q′. Trouver le lieu de P′ et celui de Q′ quand C décrit Oy.

5° De l'origine on abaisse une perpendiculaire OP″ sur CP′, et une autre OQ″ sur CQ′. Trouver le lieu de P″ et celui de Q″.

(De Longchamps, J. S., **61**.)

(*Clément*, **84**, 91.)

796. On considère une ellipse E, et le cercle Δ décrit sur le petit axe BB′ comme diamètre. Sur BB′, à partir du centre O, on prend deux points P, P′ tels que l'on ait

$$OP = OP' = \frac{bc}{a};$$

par ces points P et P′, on mène deux droites parallèles et dans la même direction; ces droites rencontrent Δ en des points Q et Q′. Trouver le lieu décrit par le point de rencontre des tangentes à Δ aux points Q et Q′. (De Longchamps, J. S., **88**.)

(*Simonnot*, **84**, 278.)

797. On donne un triangle rectangle et isoscèle, et on lui circonscrit un cercle et une hyperbole équilatère variable. Ces deux courbes ont alors en commun trois points fixes et un point variable. Par ce dernier, on mène la tangente au cercle. Lieu du point d'intersection de cette tangente avec les parallèles menées par le sommet de l'angle droit aux asymptotes de l'hyperbole correspondante. (Amigues, J. S., **108**.)

(*Michel*, **86**, 46; **88**, 17.)

798. On donne un triangle rectangle isoscèle, on lui circonscrit un cercle et une hyperbole équilatère variable. Ces deux courbes ont alors en commun trois points fixes et un point variable. En ce dernier, on mène la tangente à l'hyperbole; lieu du point d'intersection de cette tangente avec les parallèles menées par le sommet de l'angle droit aux asymptotes de la même hyperbole. (Amigues, J. S., **173**.)

(*Michel,* **88**, 93.)

799. Soit Γ une ellipse donnée; sur le petit axe, comme diamètre, on décrit un cercle Δ. Par un point M, mobile sur Δ, on trace une tangente qui rencontre Γ aux points P, Q; soit M′ l'isotomique de M sur PQ (c'est-à-dire le symétrique de M par rapport au milieu de PQ). On demande le lieu décrit par M′.

Ce lieu est une courbe unicursale du sixième ordre; on distinguera les différentes formes du lieu, suivant que l'on a $b > c$, ou $b < c$. (Griess, J. S., **247**.)

(*Brocard,* **91**, 69.)

800. On considère une conique H et un point fixe M. De M comme centre, avec un rayon variable, on décrit un cercle Γ.

Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes à H, Γ.

Ce lieu est une strophoïde oblique.

(De Longchamps, J. S., **269**.)

(*Rezeau,* **91**, 231.)

***801.** Du centre d'un cercle intérieur et bitangent à une conique, on abaisse une perpendiculaire sur une tangente à la courbe, et l'on considère les deux points de cette perpendiculaire qui se trouvent à une distance de son pied égale à la longueur de la tangente menée de ce pied au cercle. Trouver le lieu décrit par l'un de ces points : 1° lorsque la tangente est fixe et que le cercle bitangent varie; 2° lorsque le cercle restant le même, le point de contact avec la tangente se déplace sur la conique. Solutions géométriques. (Tissot, J. S., **320**.)

Une conique, et plus d'un cercle.

*802. On donne dans un plan une ellipse et une circonférence (O) concentriques. Une seconde circonférence (O′) roule sans glisser sur la première. On demande le lieu des points d'intersection des tangentes communes à la circonférence (O′) et à l'ellipse.

(DEMAN, N. A., **829**.)

803. On décrit tous les cercles simplement tangents à une conique B, en un point fixe C. On mène à chacun de ces cercles des tangentes parallèles à deux diamètres fixes de la conique; trouver le lieu géométrique des points M d'intersection de ces tangentes. (BARBARIN, N. A., **1284**.)

(*Fauquembergue*, **79**, 325.)

804. On donne une ellipse de demi-axes OA, OB et deux circonférences concentriques à l'ellipse, et de rayons r, R; $r = \text{OB}$. Une droite, issue du centre O commun aux trois courbes, coupe les circonférences r, R en des points C, D par lesquels on mène des parallèles à OA dirigées dans le sens OA. La première rencontre l'ellipse au point E, la seconde est rencontrée en un point F, par la normale à l'ellipse en E; trouver le lieu géométrique du point F. (LEBON, N. A., **1418**.)

(*Lez*, **83**, 325.)

805. En un point quelconque M d'une ellipse on mène les rayons vecteurs focaux MF et MF′ qui ont leurs seconds points de rencontre avec l'ellipse en P et P′. Montrer que :

1° Les cercles ayant pour diamètre FM, F′M, FP, F′P′ sont tangents au cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre;

2° Le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures aux cercles de diamètres FM et FP est une ligne droite;

3° Le lieu du point de rencontre des tangentes communes

extérieures aux cercles de diamètres FM et F′M est une quartique. Montrer que la portion d'aire comprise entre la courbe et ses asymptotes est égale aux trois quarts de l'aire de l'ellipse.

(Barisien, N. A., **1620**.)

(*Greenstreet*, **92**, 20*.)

806. On considère une ellipse rapportée à ses axes : soient A, A′, les extrémités du grand axe, B, B′ les extrémités du petit axe. On mène des tangentes à l'ellipse en ces quatre points, et une tangente Δ supposée mobile rencontre celles-ci en des points α, α', β, β' ; enfin sur $\alpha\alpha'$ comme diamètre on décrit un cercle U, et sur $\beta\beta'$ un cercle V. Cela posé, on propose les questions suivantes :

1° Équation générale des cercles U ;

2° Équation des cercles V ;

3° Quel est l'angle d'anomalie du point de contact M de la tangente Δ quand les cercles U et V sont égaux ?

4° Démontrer que l'axe radical des cercles U et V n'est autre chose que la normale au point M ;

5° Par le centre de l'ellipse, on mène une tangente au cercle V. Démontrer que le lieu des points de contact est le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre ;

6° Démontrer que les cercles U et V se coupent orthogonalement ;

7° Trouver le lieu décrit par les points communs aux cercles U et V, et démontrer que ce lieu se compose de deux cercles concentriques à l'ellipse et de rayons $(a - b)$ et $(a + b)$.

(De Longchamps, J. S., **12**.)

(*Cartier*, **82**, 253.)

LIEUX RELATIFS A DEUX CONIQUES.

—

Une ellipse au moins.

807. Deux disques situés dans le même plan et ayant la forme d'ellipses égales sont mobiles chacun autour d'un de leurs

foyers supposé fixe; ces disques restent constamment tangents l'un à l'autre. On demande le lieu décrit par le point de contact.

(DAUPLAY, N. A., 899.)

(*Brocard*, **72**, 457.)

*808. Deux ellipses sont situées dans le même plan; l'une est fixe et l'autre mobile autour de son centre. Dans chaque position de l'ellipse mobile, on mène les tangentes communes. On demande le lieu des points de rencontre.

Quand les ellipses sont extérieures, il y a deux tangentes extérieures et deux tangentes intérieures. Trouver le lieu des points de rencontre des premières tangentes et le lieu des points de rencontre des secondes. Examiner les cas particuliers.

(DAUPLAY, N. A., 938.)

809. Deux ellipses égales sont tangentes à la même droite au même point fixe, l'une par l'extrémité du grand axe, l'autre par l'extrémité du petit axe. Les deux demi-axes a et b sont liés par la relation $ab =$ const. On demande :

1° Les lieux des points d'intersection;

2° Le lieu des milieux des tangentes communes.

(N. A., 944.)

(*Moret-Blanc*, **73**, 572.)

*810. On donne, dans un même plan, une ellipse et une autre conique qui passe par le centre de la première. On mène dans l'ellipse deux diamètres conjugués, qui la coupent aux points A, B, A', B', et qui coupent la conique aux points C, D :

1° Démontrer que la corde CD passe par un point fixe F, quel que soit le système de diamètres conjugués qu'on aura choisi;

2° Trouver le lieu que décrit le point F, quand on suppose que la conique tourne autour du centre de l'ellipse, celle-ci restant fixe;

3° Construire les deux lieux précédents, dans le cas particulier où la conique est une hyperbole équilatère, dont l'axe transverse est égal au grand axe de l'ellipse et dont un sommet réel coïncide avec le centre de cette ellipse.

(SOUILLART, N. C., 321.)

811. On donne sur un plan deux ellipses (O, O′). Soient X, X′ deux points quelconques de ces courbes ayant même anomalie excentrique. Trouver le lieu du point Z tel que le triangle ZXX′ soit semblable à un triangle donné.

(LAISANT, M., 558.) ([1]).

(*Déprez*, **89**, 164.)

812. On considère une ellipse E rapportée à ses axes, et une conique Δ passant par les foyers et les extrémités B, B′ du petit axe de E. Cette conique Δ rencontre E en deux points M et N, différents de B et B′. En ces points, on mène à E des normales qui rencontrent Δ en des points I, I′, dont on demande le lieu géométrique. (DE LONGCHAMPS, J. S., 16.)

(*Devin*, **82**, 157.)

813. On considère une ellipse E, rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et un diamètre quelconque PP′. Par les extrémités P, P′ de ce diamètre et par les foyers de l'ellipse donnée, on fait passer une hyperbole équilatère H, qui rencontre E en deux points diamétralement opposés, Q, Q′. Ceci posé, aux points P, Q, on mène les tangentes à E; ces droites se rencontrent en un point I : 1° trouver le lieu de ce point quand PP′ tourne autour du centre de E. Ce lieu est le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes;

2° Au point I, on abaisse des perpendiculaires sur les asymptotes de H : trouver le lieu de ces projections. Ce lieu est la podaire du centre de l'ellipse E.

([1]) Rappelons que l'anomalie excentrique d'un point dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, l'ellipse étant rapportée à ses axes, est l'angle φ tel que $\cos\varphi = \frac{x}{a}$, $\sin\varphi = \frac{y}{b}$.

Une indication erronée à ce sujet avait été jointe à l'énoncé, primitivement.

3° On demande de vérifier ces deux résultats par des considérations géométriques en établissant d'abord le théorème élémentaire suivant : on considère un triangle ABC et sur la base BC deux points D et D′ également éloignés du milieu de BC. Soit D″ le symétrique de D par rapport au point A.

La droite D′D″ rencontre AC en un point M; la droite qui va de D′ au milieu de MC est parallèle à AB.

(De Longchamps, J. S., **23**.)

(*Clément*, **84**, 63.)

814. Une ellipse passe par un point fixe A, et touche une droite donnée à un de ses sommets. Le rapport de l'axe parallèle à la droite à celui qui lui est perpendiculaire est m. Par chaque point du plan passent deux ellipses satisfaisant à ces conditions. Lieu des points tels que les deux ellipses qui y passent soient orthogonales. Dans le cas de $m = 1$, on aura pour lieu un cercle et un point. Démontrer ce fait par la Géométrie élémentaire. (Amigues, J. S., **68**.)

(*Saillard*, **84**, 135.)

Une parabole au moins.

815. Une parabole ayant le foyer fixe et touchant une conique donnée, de même foyer; si l'on mène par le foyer une droite faisant un angle constant avec l'axe variable de la parabole, le lieu du point d'intersection de cette droite et de la parabole variable est une conchoïde du cercle (limaçon de Pascal).

(Chasles, N. A., **138**.)

(*Vannson*, **47**, 122.)

816. Étant donnés un point et une droite, soient deux paraboles ayant toutes deux pour tangente la droite donnée, et le point donné pour foyer commun; en supposant qu'elles se coupent toujours sous le même angle, leur point d'intersection décrira un cercle. (Strebor, N. A., **202**.)

(*Jaufroid*, **49**, 377.)



817. Étant donnés trois points fixes, trouver le lieu d'un quatrième point tel, que les axes des deux paraboles passant par ces quatre points forment entre eux un angle donné. (N. C., **22.**)

(*Philippin, Saltel,* **75**, 143, 228.)

818. Étant données deux paraboles de même sommet et dont les axes sont perpendiculaires :

1° Trouver le lieu des points tels qu'une tangente menée à une parabole et une tangente menée à l'autre soient perpendiculaires; 2° trouver les points pour lesquels les quatre tangentes sont perpendiculaires deux à deux; 3° trouver l'équation de la tangente réelle commune aux deux paraboles; 4° trouver le lieu de la projection du sommet commun sur cette tangente commune, quand le point, dont les projections sur les axes sont les foyers, décrit une circonférence ayant son centre au sommet commun. (N. C., **373.**)

(*Jamet,* **78**, 296.)

819. Une parabole se déplace parallèlement à elle-même de manière que son sommet décrive la courbe dans sa position initiale. Chercher le lieu des points d'intersection des tangentes menées à la parabole mobile par les points où elle est rencontrée par une droite fixe. (M., **170.**)

(*Pisani,* **83**, 241.)

820. On donne sur une circonférence deux points fixes A, B et un point mobile M. Démontrer qu'il y a deux paraboles passant par A, B et tangentes à la circonférence au point M. Trouver le point de rencontre de leurs axes, et le lieu que décrit ce point, quand M parcourt la circonférence. (Barbarin, M., **430.**)

(*Brocard,* **88**, 170.)

821. On donne une parabole $y^2 = 2px$ rapportée aux axes ordinaires; autour de l'origine on fait tourner deux droites rectangulaires rencontrant la parabole aux points A et B, et l'on

construit une hyperbole H ayant pour asymptotes OA et OB et passant par un point fixe K situé sur la bissectrice des axes. Trouver :

1° Le lieu du pôle de AB par rapport à H;

2° Le lieu Σ des points de rencontre de AB avec H.

On cherchera les points de Σ qui se trouvent sur les droites $x = 2p$ et $y = x$. On discutera les différentes formes de la courbe suivant la position du point K sur la ligne $y = x$.

(De Longchamps, J. M., 243.)

(*Comandré*, **80**, 569.)

*822. Étant donnés une parabole P et deux points A et B de cette courbe situés sur une même corde principale (c'est-à-dire sur une même perpendiculaire à l'axe), on fait passer par les deux points A et B une hyperbole équilatère de forme constante, c'est-à-dire dont l'axe est invariable en grandeur. On demande de trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes à la parabole fixe et à l'hyperbole variable, lorsque celle-ci change de position en passant toujours par les points fixes A et B.

(J. M., 283.)

*823. Dans le plan d'une parabole fixe glisse une parabole mobile égale, de telle sorte que le sommet de chacune d'elles soit sur l'autre. Démontrer qu'un point quelconque du plan de la parabole mobile décrit une podaire de développée de parabole [1]. (E. Lucas, J. S., 29.)

824. On considère une conique à centre Δ; soient S l'un des sommets de cette courbe, et AB une corde principale. On trace une parabole P passant par les points A et B, et ayant, elle aussi, le point S pour sommet. Soit I le point de contact de la

---

[1] D'après une remarque très juste que nous communique M. Brocard, si le point mobile considéré est le sommet de la parabole mobile, la trajectoire décrite est la parabole donnée; cependant celle-ci n'est point la podaire d'une parabole cubique. L'énoncé, semble-t-il, devrait donc être modifié. Nous le conservons parce qu'il pose la question d'un lieu géométrique intéressant à étudier.

parabole P avec une droite à la fois tangente à Δ et P. Lieu du point I, quand la corde AB se meut parallèlement à elle-même.

(De Longchamps, J. S., 51.)

(*Clément*, **84**, 86.)

825. On considère deux points fixes A, B; un angle droit uOv pivote autour d'un point fixe O et l'on considère les deux paraboles P et Q qui, passant par A et B, ont pour axes, respectivement, Ou et Ov.

Trouver le lieu décrit par les deux autres points qui sont communs à P et à Q.

On examinera le cas particulier où le point O est situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB. (J. S., 190.)

(*Leinekugel*, **90**, 47.)

826. On considère un angle droit yOx et, par un point C donné sur Oy, on mène une droite Δ parallèle à Ox.

Autour de O on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent Δ aux points M et M′, et l'on imagine les deux paraboles U et V qui ont pour sommets respectivement les points M, M′, dont les axes sont MO et M′O, et qui passent par C.

Cela posé :

1° Trouver le lieu des points de rencontre des axes de U avec les paraboles V, ou des axes de V avec les paraboles U.

Ce lieu est un cercle.

2° Démontrer que le lieu des points P, Q, R communs aux paraboles U et V est un cercle.

3° Chercher le lieu des points de rencontre des directrices des paraboles U et V.

Ce lieu est une droite parallèle à Ox.

4° Démontrer que les cinq points C, P, Q, R, O appartiennent à une certaine hyperbole équilatère H ayant pour centre le milieu de OC.

5° Trouver le lieu décrit par le centre de gravité et par l'orthocentre de PQR.

6° Les asymptotes de H rencontrent les axes des paraboles U

et V en des points dont le lieu géométrique est un système de deux cercles. (DE LONGCHAMPS, J. S., **211**.)

(*Brocard,* **90**, 186.)

Deux coniques en général.

827. Étant données sur un plan les projections cylindriques ou coniques ABC, A′B′C′ des intersections d'un cône quelconque par deux plans, et la projection O du sommet du cône, menez un rayon vecteur quelconque OBB′ et les tangentes en B, B′; ce rayon tournant autour de O, quel sera le lieu du point X, intersection des tangentes? (FINCK, N. A., **57**.)

(*Brocard,* **72**, 129.)

828. Étant données deux coniques dans un même plan, le lieu d'un point tel que les quatre tangentes menées de ce point aux quatre coniques forment un faisceau harmonique est une conique. (SALMON, N. A., **407**.)

(*De Jonquières,* **60**, 316.)

829. A et B sont deux coniques dans un même plan. D'un point quelconque situé sur A on abaisse une perpendiculaire sur la polaire de ce point relativement à B. Quel est le lieu du pied de cette perpendiculaire? Quand ce lieu est-il une conique? un cercle? (N. A., **491**.)

(*Cremona,* **64**, 25.)

830. Si deux coniques de forme invariable se déplacent de manière que leurs quatre axes restent respectivement tangents à quatre cercles, et de manière que les points d'intersection des deux coniques soient sur un cercle, quel est le lieu des centres de ce cercle? (DARBOUX, N. A., **911**.)

(*Hioux,* **69**, 178.)

831. Deux coniques semblables et semblablement placées sont tangentes en un point A.



Par ce point A on mène une corde AB dans l'une des coniques, et la corde AC perpendiculaire à AB dans l'autre; on joint BC; du point A on abaisse une perpendiculaire AI sur BC; trouver le lieu du point I quand AB tourne autour du point A.

(Lafont, N. A., **923**.)

(*Bédorez,* **71**, 379.)

832. Démontrer que, si deux coniques de grandeur fixe ont un foyer commun F, et si l'une d'elles tourne autour de ce foyer dans son plan, le lieu des points de concours des tangentes communes à ces deux coniques est un cercle. Si les deux coniques sont telles que, dans une de leurs positions, les tangentes communes soient parallèles, elles le seront dans toutes : montrer que la condition de parallélisme de ces tangentes communes est l'égalité des axes non focaux. (Lemoine, N. A., **1094**.)

(*Jamet,* **73**, 41.)

833. Soient S, S′ deux coniques dans un plan. Le lieu du point d'intersection des diamètres de l'une et de l'autre de ces courbes, correspondant à des cordes de même direction, est, en général, une conique. Examiner l'espèce de cette conique, d'après l'espèce et la position relative des coniques S, S′.

(Androusski, N. A., **1225**.)

(*Thuillier,* **77**, 478.)

***834**. Lieu géométrique des intersections des tangentes à une conique, avec les polaires des points de contact, par rapport à une autre conique. (Zahradnik, N. C., **207**.)

835. Étant donnée une tangente T à une conique C, on mène, par les points où T rencontre une conique variable, homofocale à C, deux nouvelles tangentes à C. Trouver le lieu du point de rencontre de ces droites. (Neuberg, M., **396**.)

(*Déprez,* **88**, 231.)

***836**. Lieu du sommet d'un triangle dont les deux côtés issus

du sommet touchent une conique donnée, tandis que les deux autres sommets parcourent une seconde conique donnée.

(J. M., 236.)

837. Étant données deux coniques $c = 0$ et $c' = 0$, trouver le lieu des points M tels que leurs polaires par rapport à ces deux coniques se coupent sur une troisième courbe donnée $f(x, y) = 0$.

Étudier la question en particulier 1° quand $f(x, y) = 0$ est une droite; 2° quand $f(x, y) = 0$ est un cercle. (J. M., 246.)

(*Gilly*, **81**, 374.)

***838.** On donne deux coniques fixes U et V, et un point fixe S; par le point S on mène une transversale arbitraire qui détermine sur U un segment $(m'm'')$ et sur V un segment $(n'n'')$, et l'on demande : 1° le lieu du centre de l'involution déterminée par ces deux segments; 2° le lieu des points doubles de cette involution. Expliquer comment ce dernier lieu peut devenir le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à une série de coniques homofocales. (Vazeille, J. S., 93.)

***839.** Étant donnés quatre points, A, B, C, D, dans un plan, le lieu des points M tels que le faisceau (M.ABCD) soit harmonique est une conique passant par les quatre points; 1° soient deux coniques $f = 0$, $\varphi = 0$, se coupant aux points A, B, C, D. Le lieu des points M tels que le faisceau (M.ABCD) soit harmonique, les points A et B étant conjugués, est une conique de la forme $f + m\varphi = 0$. On a de même, en considérant comme conjugués les points A et C, puis A et D, deux autres coniques. Calculer les trois valeurs de m en fonction des trois racines de l'équation en λ; 2° à l'aide de cette expression de m, calculer le rapport anharmonique des points A, B, C, D sur l'une des coniques données; 3° à l'aide de cette même expression, trouver les valeurs proportionnelles des côtés du triangle qui a pour sommets les projections du point D sur les côtés du triangle ABC.

(Hadamard, J. S., 150.)

LIEUX RELATIFS A PLUS DE DEUX CONIQUES.

—

Coniques homofocales ou concentriques.

840. On donne sur un plan deux circonférences (O), (O′). Par un point fixe A de la première, on trace une conique (C) tangente en ce point à cette circonférence et doublement tangente à la seconde (O′). Cette conique (C) rencontre (O) aux points D et E; la droite DE coupe la corde de contact de (C) et de (O′) en un point M : lorsque l'on considère toutes les coniques telles que (C), le lieu de ce point est une circonférence.

(Mannheim, N. A., **706**.)

(*Sartiaux,* **65**, 41.)

841. On donne sur un plan deux coniques homofocales (O), (O′). Par un point fixe A de la première, on trace une conique (C) tangente en ce point à (O) et doublement tangente à la seconde (O′). On mène les tangentes communes à (O) et à (C); ces droites se coupent en M : lorsque l'on considère toutes les coniques telles que (C), le lieu de ce point est une conique homofocale aux coniques données. (Mannheim, N. A., **707**.)

(*Sartiaux,* **65**, 41; **67**, 278.)

842. Δ étant le lieu des pôles d'une droite D par rapport à un système de coniques homofocales, trouver le lieu des points de rencontre de D et de Δ, lorsque D pivote autour d'un point fixe. (Valdo, N. A., **1590**.)

(*Barisien,* **89**, 586.)

***843.** Trouver le lieu du point de contact des tangentes parallèles à une direction donnée, à une série d'ellipses ou d'hyperboles homofocales. (Nicolaïdès, N. C., **119**.)

844. On considère des ellipses ayant pour centre un point

donné et tangentes à une droite, en un même point A. Le cercle osculateur en A rencontre l'ellipse correspondante en un point dont on demande le lieu. (MENNESSON, N. C., **367**.)

(*Bombled,* **79**, 103.)

*845. On donne une infinité de sections coniques homofocales, et un point situé dans leur plan; et l'on demande :

1° Quel est le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées à ces courbes, par le point donné;

2° Quel est le lieu géométrique des pieds des normales menées à ces courbes, par le point donné;

3° Quel est le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées, du point donné, sur les cordes de contact.

(N. C., **564**) [1].

846. On considère les ellipses E, ayant le même centre, leurs axes de directions fixes, et homothétiques; par deux points fixes, l'un A pris sur Ox, l'autre B pris sur Oy, de telle façon que $OA = a$, $OB = b$, on fait passer des cercles C tangents à E au point I. Trouver le lieu de ce point. Ce lieu est une cubique; on propose de la construire dans le cas particulier où les courbes E sont des cercles. (DE LONGCHAMPS, J. S., **36**.)

(*Alexandre,* **83**, 45.)

Coniques inscrites ou circonscrites.

847. Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe aux hyperboles équilatères tangentes aux trois côtés d'un triangle donné. (ROUSSET, N. A., **1150**.)

(*Astor*, **75**, 189.)

848. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une

---

[1] Nous appelons sur cette question toute l'attention du lecteur. De l'avis de M. Catalan, c'est une des plus intéressantes qui aient été proposées dans les concours généraux (1840). Chasles en a donné une solution.

droite donnée, menées aux coniques inscrites dans un quadrilatère donné. (GAMBEY, N. A., **1200**.)

(*Moret-Blanc,* **76**, 549.)

849. Soient ABCD un quadrilatère, AB et CD, BC et DA les couples de côtés opposés, se coupant respectivement en λ et μ; ω et ω' des points divisant harmoniquement $\lambda\mu$. Démontrer que la conique qui passe par les six points A, B, C, D, ω, ω' est le lieu des points de contact des tangentes menées par ω et ω' à toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère ABCD.

(LEMOINE, M., **662**.)

(*Déprez,* **90**, 235.)

850. On considère des coniques inscrites dans un carré dont les diagonales sont prises comme axes de coordonnées. D'un point P, dont les coordonnées sont α, β, on abaisse des normales sur ces coniques. Trouver le lieu décrit par les pieds de ces normales. En désignant par $2a$ la longueur de la diagonale du carré proposé, on fera voir que ce lieu est une quartique ayant un point double en P, et que l'équation de cette courbe est

$$(\beta x + \alpha y - 2xy)(\alpha x + \beta y - x^2 - y^2) = a^2(\alpha - x)(\beta - y),$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 - a^2)(\alpha - x)(\beta - y) + xy[(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2] = 0;$$

on construira cette courbe, et l'on distinguera les différentes formes, suivant que le point P est situé dans l'une ou l'autre des régions du plan définies par les quatre côtés du carré supposés prolongés indéfiniment.

Enfin, on distinguera sur le lieu les points qui proviennent des ellipses de ceux qui proviennent des hyperboles du faisceau considéré. (DE LONGCHAMPS, J. S., **44**.)

(*Callé,* **83**, 107.)

851. Des coniques sont circonscrites à un losange. La bissectrice des diagonales coupe l'une des coniques en deux points A

et B. Du point B, on mène la perpendiculaire BH sur la tangente en A. Lieu du point H. Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur la tangente en A. Lieu des pieds des perpendiculaires menées d'un point fixe à la polaire d'un point fixe. (AMIGUES, J. S., 69.)

(*Saillard,* **84**, 139.)

852. Parmi toutes les coniques circonscrites à un même triangle ABC, on considère seulement la série de celles pour chacune desquelles les normales en A, B, C sont concourantes, et l'on demande le lieu du point de concours.

(VAZEILLE, J. S., **114**.)

(*Taratte,* **86**, 186; **89**, 138.)

Autres générations.

***853.** Étant donnée la base d'un triangle curviligne, formé par trois arcs d'hyperboles équilatères, ayant le même centre, le lieu du sommet, lorsque l'angle fait par les deux côtés est constant, sera une ellipse de Cassini. (STREBOR, N. A., **176**.)

854. Étant donnée la base d'un triangle curviligne formé par trois arcs de paraboles ayant le même foyer, le lieu du sommet, lorsque l'angle fait par les deux côtés est constant, sera un ovale de Descartes. (STREBOR, N. A., **180**.)

(*Combescure,* **54**, 283.)

855. Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse fixe et à toutes les hyperboles équilatères passant par les foyers de cette ellipse. (DARBOUX, N. A., **871**.)

(*Pellet,* **69**, 465.)

856. Former l'équation des coniques qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui passent par deux points : l'un réel

ayant pour coordonnées

$$x = a, \qquad y = b;$$

l'autre imaginaire ayant pour coordonnées

$$x = a\sqrt{-1}, \qquad y = -b\sqrt{-1}.$$

Trouver ensuite le lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y. (Dupain, N. A., **927**.)

(*Burtaire*, **69**, 424.)

857. Former l'équation des coniques qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui passent par deux points imaginaires conjugués : l'un de ces points ayant pour coordonnées

$$x = a(\cos 45^\circ + \sqrt{-1}\sin 45^\circ),$$
$$y = b(\cos 45^\circ - \sqrt{-1}\sin 45^\circ).$$

Trouver ensuite le lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y. (Dupain, N. A., **928**.)

(*Garet*, **69**, 515.)

858. Appelant projections d'un point sur une courbe les pieds des normales abaissées de ce point sur la courbe, on demande :

1° Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les droites qui passent par *un* point donné?

2° Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les circonférences qui passent par *deux* points donnés?

4° Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les paraboles qui passent par *trois* points donnés?

4° Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les coniques qui passent par *quatre* points donnés?

5° Peut-on déduire de la solution de cette dernière question les solutions des questions précédentes.

(Mannheim, N. A., **1077**.)

(*Moret-Blanc*, **75**, 77.)

***859.** Soient PA, PB, PC les trois normales menées d'un point P à une parabole donnée; on considère les centres O, O′, O″, O‴ des quatre cercles tangents aux côtés du triangle ABC.

1° Si le point P est sur la directrice, il coïncide avec l'un des points O, O′, O″, O‴. Les trois autres sont sur la parabole, lieu des sommets des angles droits normaux à la parabole donnée.

2° Par les points O, O′, O″, O‴ on peut faire passer trois hyperboles équilatères, telles que les normales à chacune d'elles en ces quatre points soient concourantes. Les trois points de concours Q_1, Q_2, Q_3 sont sur un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle ABC et de rayon triple, et sur les rayons de ce cercle qui passent par les centres des hyperboles correspondantes.

Pour quelles positions du point P les trois hyperboles sont-elles réelles? L'une de ces hyperboles a son centre sur l'axe de la parabole.

Si le point Q correspondant est sur cette parabole, l'hyperbole correspondante passe par le point P.

3° En général, quel est le lieu du point P tel que l'une des hyperboles précédentes passe par ce point? Quel est le lieu du point de concours Q, du centre de l'hyperbole, des points O, O′, O″, O‴?

4° Quel est le lieu des points Q_1, Q_2, Q_3, si le point P décrit une droite donnée? (Hadamard, N. A., **1528**.)

860. Trouver le lieu des pieds des normales abaissées d'un point donné sur les coniques d'un faisceau.

(Darboux, N. A. **1610**.)

(*Barisien,* **91**, 34*, 50*.)

861. On donne deux faisceaux de coniques, et l'on demande le lieu des points où une des coniques de l'un des faisceaux touche les diverses coniques de l'autre faisceau.

(Darboux, N. A., **1611**.)

(*Barisien,* **91**, 47*.)

862. On donne une droite D, dont l'équation, par rapport à deux axes rectangulaires, est

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

On considère les différentes coniques qui, ayant pour axes Ox et Oy, sont normales à la droite D. Chacune d'elles rencontre la droite en deux points. En ces points, on mène les tangentes à la conique.

Trouver l'équation du lieu du point de concours des tangentes. Démontrer : 1° que ce lieu est une parabole; 2° que la distance du foyer au sommet de cette parabole est le quart de la distance du point O à la droite D.

Construire géométriquement l'axe et le sommet de la parabole. (N. C. **418** *bis*.)

(*Brocard*, **79**, 59.)

863. On considère toutes les paraboles qui passent par deux points donnés A et B, et telles que les tangentes en ces points se coupent en un point quelconque M d'une droite donnée D. Trouver 1° le lieu du point de concours de la normale en A avec le diamètre qui passe par B; 2° le lieu du point d'intersection de deux de ces paraboles, lorsque les tangentes menées par A et B à ces courbes partagent harmoniquement la distance de deux points P et Q donnés sur la droite D. (Neuberg, M., **389**.)

(*Pisani*, **87**, 70.)

864. Étant donnés trois points dans un plan, on considère toutes les hyperboles équilatères passant par ces trois points, et de l'un des points donnés on mène des perpendiculaires sur les asymptotes de toutes ces hyperboles; on demande le lieu des pieds de ces perpendiculaires. (J. M., **397**.)

865. On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy; sur Ox, deux points fixes P, Q; par ces points P, Q, on fait passer une infinité de cercles C, et l'on imagine les hyperboles H qui ont

pour asymptotes Ox, Oy et sont tangentes à C. Trouver le lieu des points de contact des courbes H et C.

(De Longchamps, J. S., **31**.)

(*Griffon*, **83**, 63.)

866. On considère une ellipse E, rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

par les sommets on fait passer une infinité de coniques S, et l'on imagine une tangente commune à R et à S.

Le point de contact de cette droite avec S décrit un lieu géométrique; on construira ce lieu, qui est une courbe du quatrième degré, et l'on indiquera les points qui proviennent d'une ellipse S ou d'une hyperbole S. (De Longchamps, J. S., 38, **40**.)

(*Alexandre*, **86**, 67.)

867. On considère deux droites rectangulaires Ox et Oy, et un cercle C, tangent à l'une et à l'autre de ces droites, aux points A et B; par O, on mène une transversale mobile qui rencontre C aux points M et N. 1° Par les quatre points A, B, M, N, on fait passer une hyperbole équilatère H. Les tangentes à H aux points M et N se coupent en un point I. Trouver le lieu de ce point quand MN tourne autour du point O. Ce lieu est une circonférence; 2° on joint AM et BN : ces droites se coupent en un point I′. Trouver le lieu de ce point I′ : ce lieu est une hyperbole, dont on demande l'équation lorsqu'elle est rapportée à son centre et à ses axes; 3° par les points A, B, M, N on fait passer une parabole P; démontrer que par un point du plan passent deux paraboles P, et trouver avec un seul paramètre variable l'équation générale et rationnelle des paraboles P; 4° trouver le lieu décrit par l'intersection de P avec le diamètre de cette courbe qui passe par le point O. Ce lieu est une hyperbole homothétique à celle qui a été trouvée tout à l'heure; on construira les asymptotes de ces courbes. (De Longchamps, J. S., **76**.)

(*Davoine*, **84**, 250.)

868. Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées rectangulaires. On considère des paraboles P qui passent par l'origine tangentiellement à Ox et qui coupent Oy en un point fixe A ($OA = 4b$). Sur OA on prend un point B tel que $OB = b$ et de ce point B on mène des normales à P. Trouver le lieu décrit par les pieds de ces normales. Abstraction faite de la normale BO, on peut mener deux normales à la parabole P, par le point B. On fera voir que le lieu demandé est constitué : 1° par une droite menée par B parallèlement à Ox, et l'on donnera une démonstration géométrique de cette propriété;

2° Par une quartique unicursale.

On vérifiera que cette quartique, formée de deux ovales présentant à l'origine un point d'embrassement, correspond : soit à l'équation cartésienne

$$x^4 + 2x^2y(y-2b) + y^2(y-b)(y-4b) = 0,$$

soit aux équations

$$\frac{x}{b} = \frac{3t(t^2-2)}{(t^2+1)^2},$$

$$\frac{y}{b} = \left(\frac{t^2-2}{t^2+1}\right)^2.$$

(De Longchamps, J. S., 205.)

(*Delbourg*, **90**, 178.)

LIEUX DE CENTRES.

Centres de cercles.

869. Trouver le lieu des centres des cercles inscrits aux triangles ayant pour sommet l'un des foyers d'une conique et pour base une corde passant par l'autre foyer; le centre est sur la parallèle à l'axe focal menée par le milieu de la corde.

(Rouché, N. A., 433.)

(*Grouvelle*, **58**, 285.)

870. On donne une parabole P et on propose :

1° De trouver l'équation du cercle C qui passe par un point M du plan et par les points de contact des tangentes menées de ce point à la parabole ;

2° De trouver le lieu des points M pour lesquels ce cercle a un rayon constant ;

3° De trouver le lieu du centre de ce cercle de rayon constant ;

4° De démontrer que la polaire du point M par rapport à la parabole et la seconde corde d'intersection du cercle et de la parabole se coupent sur une droite déterminée.

(Barbarin, N. A., 1348.)

(*Boudènes*, **81**, 180.)

871. Démontrer que le lieu décrit par le centre de la circonférence qui passe par les points d'incidence des normales abaissées sur une ellipse d'un même point de la développée a pour équation

$$4(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = a^2b^2c^4x^2y^2.$$ (Neuberg, M., 71.)

(*Brocard*, **83**, 39.)

872. Étant donnés une conique et deux points quelconques, on mène par ces deux points deux sécantes rencontrant la courbe en quatre points d'une même circonférence. Trouver le lieu du centre de cette circonférence. (Allersma, M., 397.)

(*Verniory*, **87**, 97.)

873. Une conique passe par quatre points fixes O, A, B, C. Trouver le lieu du centre du cercle osculateur au point O.

(Jamet, M., 462.)

(*Brocard*, **88**, 121.)

874. Une conique passe par trois points fixes A, B, C et touche une droite fixe Ox en un point variable M. Lieu du centre du cercle osculateur au point M. (Jamet, M., 463.)

(*Pisani*, **88**, 143.)

875. Étant donnée une conique qui passe à l'origine des axes, supposés rectangulaires, on considère les cordes de cette conique, qui sont vues de l'origine sous un angle droit; par les extrémités de chacune de ces cordes et par l'origine on fait passer un cercle; on demande le lieu des centres de tous ces cercles. (J. M., **244**.)

(*Coignard,* **80**, 524.)

876. Étant donnée une conique, on considère les cercles qui sont tangents à cette conique et tels que les tangentes communes à la conique et au cercle soient parallèles. Trouver le lieu des centres de tous ces cercles. (J. M., **356**.)

(*Dupuy,* J. S., **83**, 117.)

877. On considère des cercles C passant par le sommet d'une parabole P, et tangents à cette courbe en un point différent du sommet : 1° trouver l'équation générale de ces cercles C; 2° trouver le lieu U des centres. Ce lieu est une parabole cubique ayant un point de rebroussement dont les coordonnées sont (p, o); on demande de déterminer l'intersection de U et de P. (De Longchamps J. S., **32**.)

(*Jaggi,* **83**, 65.)

878. On considère une hyperbole équilatère H et une des asymptotes D de cette courbe; soient P et Q deux points fixes de H, et R un point mobile sur l'hyperbole. 1° On demande le lieu géométrique des centres des cercles C circonscrits au triangle formé par les droites RP, RQ et D; 2° ayant mené par R une perpendiculaire à D, cette droite rencontre le cercle C en un point I, autre que R. Trouver le lieu de ce point I.

(De Longchamps, J. S., **41**.)

(*Kauffmann,* **83**, 68.)

879. Trouver le lieu des centres des cercles circonscrits à tous les triangles polaires conjugués par rapport à une parabole.

(Kœhler, J. S., **65**.)

(*De Kerdrel,* **84**, 232.)

880. On considère un triangle ABC, inscrit dans une parabole, et dont l'hypoténuse est une normale de la courbe. Trouver le lieu décrit par le centre du cercle inscrit à ce triangle.

(De Longchamps, J. S., **73**.)

(*Saillard,* **84**, 247.)

881. On considère une parabole fixe et un cercle de rayon constant, mais variable de position. On suppose que le cercle se déplace dans le plan sous la condition que, dans chacune de ses positions, le cercle mobile et la parabole fixe aient un système de tangentes communes rectangulaires. On propose de trouver et d'étudier le lieu que décrit le centre du cercle quand il occupe dans le plan toutes les positions compatibles avec la condition donnée. (J. S., **98**.)

(*Giat,* **85**, 236.

882. On considère un triangle rectangle ABC inscrit dans une parabole, et dont l'hypoténuse est une normale de la courbe; trouver le lieu décrit par le centre du cercle inscrit à ce triangle.

(De Longchamps, J. S., **112**.)

(*Brocard,* **90**, 173.)

Centres d'ellipses ou d'hyperboles.

883. Trouver le lieu du centre d'une ellipse d'aire constante circonscrite à un triangle. (Sylvester, N. A., **895**.)

(*Farineau,* **69**, 549.)

884. Trouver le lieu du centre d'une ellipse de grandeur constante dont le périmètre passe par un point fixe, et dont l'axe focal passe par un autre point fixe.

Discuter la forme du lieu lorsque la distance des points fixes varie de zéro à l'infini.

Ce lieu peut être obtenu en projetant sur les tangentes d'une

ellipse auxiliaire le point fixe par lequel passe l'axe focal de l'ellipse mobile. (DUPAIN, N. A., **933**.)

(*Preverez*, **69**, 427.)

885. Trouver le lieu géométrique des centres des hyperboles équilatères, doublement tangentes à une parabole donnée, de telle sorte que la corde des contacts intercepte sur l'axe de la parabole, à partir de son sommet, une longueur qui soit moyenne proportionnelle entre les segments que cet axe détermine sur la corde elle-même. (GAMBEY, N. A., **1186**.)

(*De Beauséjour, Moreau*, **76**, 140, 142.)

886. Le lieu des centres des hyperboles équilatères osculatrices en chaque point d'une ellipse donnée est une courbe du quatrième ordre qui peut être considérée comme la podaire du centre d'une ellipse concentrique à la première.

(BARISIEN, N. A., **1598**.)

(*Audibert*, **91**, 27.)

887. Trouver le lieu décrit par le centre d'une ellipse qui se déplace parallèlement à elle-même en touchant constamment une ellipse fixe, égale à la première, et dont les axes sont perpendiculaires à ceux de la première.

(BROCARD, N. C., **102**, M., **260**.)

(*Mosnat*, M., **87**, 191.)

888. Trouver, sans calcul, le lieu des centres des hyperboles passant par deux points donnés, et dont les asymptotes sont parallèles à deux droites données. (CATALAN, N. C., **183**.)

(*Brocard*, **77**, 26.)

***889**. A, B étant deux points d'une ellipse; P le point de concours des normales à la courbe, en ces deux points; C, D les pieds des deux autres normales qu'on peut mener par le point P :

1° Trouver le lieu que décrit le centre de l'hyperbole équila-

tère passant par les quatre points A, B, C, D quand la sécante AB se déplace parallèlement à elle-même;

2° Prouver que le point D′, diamétralement opposé au point D, se trouve avec A, B, C sur une même circonférence; et trouver le lieu des centres de cette circonférence, quand la droite AB se déplace comme dans le premier cas. (N. C., **339**.)

890. Chercher le lieu des centres des hyperboles équilatères, touchant deux droites données en deux points qui sont en ligne droite avec un point fixe. (M., **172**.)

(*Bastin,* **84**, 39.)

891. Une ellipse donnée glisse dans son plan de manière à passer par deux points fixes P, Q. Trouver le lieu du centre C. (Catalan, M., **756**.)

(*Quint,* **92**, 170.)

*892. On donne deux droites rectangulaires OX, OY et deux points P, Q. On mène par P deux droites coupant OX, OY en quatre points A, B, C, D. Comment faut-il mener ces droites pour que les cinq points A, B, C, D, Q appartiennent à une même hyperbole équilatère?

Trouver le lieu du centre de cette hyperbole. (Neuberg, J. S., **317**.)

Centres de coniques en général.

893. Soient ABCD, MNPQ deux quadrilatères, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique, et tels que les sommets du premier soient les points de contact du second. Démontrer que le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère ABCD est tangent au lieu des centres des coniques inscrites au quadrilatère MNPQ. (Gros, N. A., **600**.)

(*Widmann,* **65**, 551.)

894. Le lieu des centres des coniques tangentes aux côtés

d'un triangle, et telles que les normales menées par les points de contact se rencontrent en un même point, est une courbe du troisième degré qui passe par les sommets du triangle, le centre de gravité, le point d'intersection des hauteurs, les centres des cercles inscrits et exinscrits, les milieux des côtés, les milieux des hauteurs. (THOMSON, N. A., **735**.)

(*Poussart*, **65**, 469.)

895. On donne dans un plan deux circonférences (O) et (O′). Un point P se meut sur la première (O) ; l'enveloppe des polaires de ce point par rapport à la circonférence O′ est une conique. Trouver le lieu du centre de cette conique lorsque le centre de la circonférence O′ se meut sur une circonférence O″ concentrique à la première (O). (DEMAN, N. A., **830**.)

(*Geoffroy*, **67**, 559, 561.)

896. Lieu des centres des coniques qui ont leurs quatre sommets sur quatre droites données. Discussion. Construire une conique, connaissant cinq droites; sur quatre d'entre elles se trouvent les sommets, sur la cinquième le centre.

(LEMOINE, N. A., **1024**.)

(*Kœhler*, **74**, 438.)

897. Lieu des centres des coniques touchant une droite en un point donné, et telles qu'un second point donné soit, par rapport à ces coniques, le pôle d'une autre droite aussi donnée.

(GAMBEY, N. A., **1214**.)

(*Berthomieu*, **76**, 556.)

898. Le lieu des centres de toutes les coniques ayant un contact du troisième ordre, au même point d'une conique donnée, est une ligne droite. (BARISIEN, N. A., **1558**.)

(*Brocard*, **91**, 7*.)

899. On donne deux points fixes M, N sur une circonférence;

on demande le lieu géométrique des centres des coniques passant par le point N et osculatrices, en M, à la circonférence donnée. (MENNESSON, N. C., 368.)

(*Bombled,* **79**, 104.)

900. Chercher le lieu des centres des coniques passant par trois points donnés A, B, C, dont l'un est un sommet de la courbe. (SCHOUTE, M., 369.)

(*Déprez,* **87**, 69, 162.)

901. Les coniques issues de P, osculant en un point Q une même ligne, ont leurs centres sur une conique dont le centre est aux trois quarts de PQ. (CESARO, M. 639.)

(*Servais*, **90**, 18.)

902. Lieu des centres des coniques, de surface donnée, circonscrites à un triangle. Examiner spécialement le cas des hyperboles. Étudier, dans ce cas, les branches infinies et les sinuosités de la courbe. (AMIGUES, J. S., 59.)

(*Callé,* **85**, 35.)

903. On donne une famille de coniques représentée par l'équation

$$x^2(1+\lambda)-2\lambda xy+\lambda^2y^2-2x=0;$$

par chaque point A, réel, du plan, passent deux coniques de la famille. Dans quelles régions doit être le point A pour que ces coniques aient une équation : 1° à coefficients imaginaires; 2° à coefficients réels. Subdiviser ces dernières régions en plusieurs autres suivant que, par le point A, il passe deux ellipses, ou deux hyperboles, ou une ellipse et une hyperbole. Lieu des centres des coniques. Séparer sur ce lieu les centres d'ellipses des centres d'hyperboles. (AMIGUES, J. S., 60.)

(*Giat,* **84**, 113.)

904. On considère l'hyperbole H

$$xy-2\beta x-2\alpha y+2\alpha\beta=0 \text{ (axes rect.) :}$$

1° Trouver le lieu des centres des coniques ζ qui touchent les axes Ox, Oy et qui, en outre, sont doublement tangentes à H.

Ce lieu se compose d'une droite Δ et d'une hyperbole équilatère K.

2° Soient U les coniques du réseau ζ qui ont leurs centres sur K. Trouver le lieu des projections de O sur la droite, qui, pour une conique U, joint ses points de contact avec les axes; et aussi le lieu des projections de O sur les cordes de contact de U avec H.

3° On propose enfin ces deux dernières questions pour les coniques V du réseau ζ qui ont leurs centres sur Δ.

(De Longchamps, J. S., **193**.)

(*A. Lévy*, **90**, 140.)

905. Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dans lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes est égale à K.

Distinguer, s'il y a lieu, les arcs qui correspondent à des centres d'ellipses. (Amigues, J. S., **197**, **227**.)

(*A. Lévy*, **90**, 163.)

906. Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dans lesquelles le diamètre parallèle à l'un des côtés du triangle conserve une longueur constante. (J. S., **234**.)

907. Trouver le lieu des centres des coniques qui ont un sommet donné et qui passent par deux points donnés.

(L. Lévy, J. S., **249**.)

908. 1° On donne dans un plan une circonférence Γ de centre O et deux points quelconques A, B. Par le point A on mène une sécante variable qui coupe Γ en deux points C, D; on fait passer une circonférence Δ par les points C, D et B, on demande le lieu du centre Δ.

Dans le cas particulier où le point B est sur la polaire de A par rapport à Γ, montrer que le lieu passe par le milieu de OB.

2° On donne dans un plan une conique Γ et deux points quelconques A, B. Par les points A, B il passe une infinité de coniques Δ homothétiques à Γ; on demande les lieux des centres de Δ.

3° Déterminer une conique passant par trois points donnés et homothétique à une conique donnée.

4° On peut généraliser ainsi le problème 1°. On donne dans un plan une conique Γ et deux points quelconques A, B. Par le point A on mène une sécante variable qui coupe Γ en deux points C, D; on fait passer une conique Δ homothétique à Γ, par les points C, D et B; on demande le lieu du centre de Δ.

5° Enfin voici le problème dans toute sa généralité : on donne dans un plan une conique Γ, deux points P, O sur cette conique et deux points quelconques A et B. Par le point A on mène une sécante variable qui coupe Γ en deux points C, D.

On fait passer une conique Δ par les points C, D et P, Q, B; on demande le lieu du centre de Δ.

Nota. — Dans ces problèmes, au lieu de chercher le lieu du centre de Δ, on peut chercher le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à Δ. (Malloizel, J. S., **262**.)

(*Tarry*, **89**, 110; **91**, 232.)

LIEUX DE FOYERS.

Foyers de paraboles.

909. Lieu des foyers des paraboles qui ont une tangente commune et une corde commune, parallèle à cette tangente.

(N. A., **42**.)

(*Vidal*, **44**, 172.)

910. Le lieu des foyers des paraboles normales à une droite

donnée, et qui la coupent en deux points fixes, est une cissoïde.
(Mention, N. A., **715**.)

(*Gilliot*, **65**, 39, 41.)

911. Le lieu des foyers des paraboles conjuguées à un triangle donné est la circonférence des neuf points de ce triangle.
(Griffiths, N. A., **742**; N. C., **56**.)

(*Lacauchie*, N. A., **66**, 227; *Even*, N. C., **77**, 219.)

912. Soient M, A, B trois points d'une circonférence; trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles tangentes en A, B, aux droites MA, MB, lorsque le point M se déplace sur la circonférence. (Laisant, N. A., **1171**.)

Michel, **75**, 464.)

913. On considère deux droites rectangulaires et un cercle tangent à ces deux droites; le lieu des foyers des paraboles tangentes à la fois aux deux droites et à la circonférence est une circonférence tangente aux deux droites. (Weil, N. A., **1455**.)

(*Barisien*, **84**, 535.)

914. Une parabole se déplace parallèlement à elle-même, en touchant une circonférence donnée. Quel est le lieu du foyer?
(Brocard, N. C., **98**, M., **221**.)

(*Timmerhans*, M., **84**, 92.)

915. Une parabole, variable de grandeur et de position, touche par son sommet P une parabole fixe donnée. La directrice de la parabole mobile est, à chaque instant, la droite perpendiculaire à l'extrémité de la corde PQ. Quel est le lieu du foyer?
(Catalan, N. C., **555**.)

916. Trouver le lieu des foyers des paraboles passant par deux points fixes et dont l'axe a une direction donnée. (M., **132**.)

(*Cesaro*, **82**, 189.)

917. Chercher le lieu des foyers des paraboles qui touchent deux droites données et dont la directrice passe par un point donné. (M., **171**.)

(*Jamet*, **83**, 67.)

918. Trouver le lieu des foyers des paraboles qui touchent deux droites données et dont l'axe passe par un point donné. (M., **388**.)

(*Déprez*, **87**, 20.)

919. D'une parabole variable, on donne la tangente au sommet et un point M; chercher le lieu du foyer et le lieu du centre du cercle osculateur au point M. (Farisano, M., **433**.)

(*Mosnat*, **88**, 72.)

920. Lieu des foyers des paraboles qui rencontrent en deux points fixes A et B une droite donnée, et qui sont normales en A à cette droite. On propose de vérifier géométriquement le résultat trouvé. (J. M., **387**.)

(*Boulogne*, J. S., **82**, 116.)

921. Le lieu des foyers des paraboles, pour lesquelles un triangle donné ABC est autopolaire, est un cercle (cercle des neuf points).

Les directrices de ces paraboles passent par un point fixe (centre du cercle circonscrit). (Poujade, J. S., **228**.)

(*Gelin*, **90**, 259.)

922. On considère les paraboles tangentes à deux droites données OX, OY, en des points variables A et B.

Si les directrices passent par un point fixe P : 1° le lieu des foyers est un cercle; 2° la droite AB passe par un point fixe Q. (Poujade, J. S., **229**.)

(*Lhébrard*, **90**, 261.)

923. Soient MA, MB deux tangentes à une parabole P. Le demi-paramètre p de cette courbe est donné par la formule

$$p.\overline{\text{MO}}^3 = (\text{aire MAB})^2,$$

O désignant le milieu de AB.

En utilisant cette relation, montrer que le lieu des foyers des paraboles de forme invariable, inscrites dans un angle fixe θ, est la quartique correspondant à l'équation

$$4x^2y^2\sin^4\theta = p^2(x^2+y^2+2xy\cos\theta).$$

(De Longchamps, J. S., **313**.)

Foyers d'autres coniques.

924. Soient M un point pris sur une courbe plane, et MO le rayon de courbure en ce point; considérons M comme l'extrémité du petit axe d'une ellipse, ayant en ce point même rayon de courbure MO; quel est le lieu des foyers de cette ellipse?

(Lancret, N. A., **111**.)

(*Brocard*, **76**. 182.)

925. Soit décrite une ellipse ayant pour axes une normale et la tangente adjacente quelconque d'une ellipse donnée et touchant le grand axe de l'ellipse au centre; et, de même, soit décrite une seconde ellipse touchant le petit axe au centre; les lieux des foyers de ces ellipses sont deux cercles concentriques à l'ellipse donnée et ayant pour rayons la demi-somme et la demi-différence des axes. (Heilermann, N. A., **521**.)

(*Schnée*, **63**, 326.)

926. On donne un triangle ABC et une ellipse qui a pour foyers les deux points B et C : trouver le lieu des seconds foyers des ellipses inscrites au triangle ABC, et dont un foyer est sur l'ellipse donnée. (Lemoine, N. A., **995**.)

(*Lez*, **73**, 455.)

927. Trouver le lieu des foyers des coniques ayant une extré-

mité de l'axe focal en un point donné, et touchant une droite en un autre point donné. (De Saint-Germain, N. A., 1121.)

(*Rousset*, **74**, 297.)

*928. Le lieu des foyers des coniques doublement tangentes à deux cercles donnés se compose de cinq cercles.

(Entretin, N. A., 1534.)

929. Soient deux coniques A et B ayant respectivement pour foyers réels a_1 et a_2, b_1 et b_2; soit C une conique quelconque inscrite dans le quadrilatère circonscrit à A et B; les deux couples de droites joignant un foyer de C aux points a_1 et a_2, b_1 et b_2 ont les mêmes bissectrices.

Le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à deux coniques reste le même si ces deux coniques varient, leurs foyers respectifs restant fixes.

Soient deux systèmes de coniques respectivement homofocales; les points d'intersection des tangentes communes à une conique quelconque du premier système et à une conique quelconque du second restent sur une courbe qui coïncide avec le lieu précédent. (G. Humbert, N. A., 1567.)

(*Renon*, **88**, 104.)

930. Une hyperbole variable a, avec une ellipse donnée, un système de diamètres conjugués communs en grandeur et en position. Chercher le lieu des foyers de l'hyperbole.

(Mantel, M. 400.)

(*Mantel*, **87**, 232.)

931. Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position. Son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers. (J. M., 234.)

(*Moulines*, **80**, 523.)



LIEUX DE SOMMETS.

Sommets de paraboles.

932. Une parabole ayant un foyer fixe, et passant par un point déterminé, le lieu du sommet est une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant sur une circonférence de même rayon. (QUÉTELET, N. A., 80.)

(*Gougis*, **44**, 124.)

933. Une parabole variable ayant un foyer fixe et touchant constamment une conique fixe de même foyer, le sommet de la parabole variable décrit une conchoïde ayant pour directrice une circonférence sur laquelle se trouve le pôle. (Limaçon de Pascal.) (CHASLES, N. A., 83.)

(*D'André*, **46**, 122, 208.)

934. La courbe, lieu géométrique des sommets de toutes les paraboles tangentes à un cercle donné, et ayant pour foyer commun un point fixe sur la circonférence du même cercle, a pour équation en coordonnées polaires

$$r^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\omega}{3}. \quad \text{(STREBOR, N. A., 175.)}$$

(*Emery*, **48**, 194.)

935. L'équation du lieu des sommets des paraboles inscrites à un triangle rectangle est, en prenant pour axes les côtés a et b de l'angle droit,

$$ax^{\frac{1}{3}} + by^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2;$$

celle du lieu des pieds des normales, issues du sommet de l'angle droit, est

$$ax^3 + by^3 = (x^2 + y^2)^2;$$

et celle du lieu des seconds points de rencontre de ces normales avec les courbes est

$$ax^3 + by^3 = (x^2 - y^2)^2.$$ (LEMONNIER, N. A., **1039**.)

(*Mynn Phornton*, **72**, 88.)

936. Trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles doublement tangentes à une hyperbole équilatère donnée, de manière que les axes de ces paraboles conservent une direction constante et donnée. Lieu des sommets des mêmes paraboles. (GAMBEY, N. A., **1208**.)

(*Portail*, **76**, 376.)

937. Démontrer que le lieu du sommet des paraboles dont le foyer décrit un cercle, et tangentes à deux diamètres rectangulaires de ce cercle, est une hypocycloïde à quatre rebroussements. (E. LUCAS, N. C., **199**.)

(*Schoentjes*, **77**, 57.)

938. On donne une ellipse fixe de foyers F et F′; une parabole a son foyer en F et est tangente à l'ellipse. Lieu du sommet S de cette parabole quand elle se déforme. (BORDAGE, J. S., **202**.)

(*Roux*, **89**, 210; **90**, 142.)

939. On considère un cercle Δ de centre O et deux diamètres rectangulaires AA′, BB′; puis, on imagine des paraboles P tangentes à Δ et passant par les points donnés B, B′. Le réseau des paraboles P est doublement infini et peut se séparer en deux réseaux : l'un constitué par des paraboles P′ dont les axes passent constamment par le milieu de OA; l'autre, par des paraboles P″ dont les axes coupent OA′ en son point milieu. On considère l'un de ces réseaux P″ : 1° On demande le lieu décrit par l'extrémité I du diamètre qui passe par O.

Ce lieu est le cercle décrit sur OA comme diamètre.

2° Démontrer que la longueur OI représente le double du paramètre de la parabole correspondante;

3° Trouver le lieu des sommets de la parabole P″.



Ce lieu est une cubique circulaire unicursale.

4° Déduire de ce lieu et de la remarque faite au § 2 le lieu des foyers.

Ce lieu est encore une cubique circulaire unicursale.

5° On propose enfin de construire ces cubiques points par points et tangentes par tangentes; en appliquant, pour celles-ci, le principe des transversales réciproques.

(De Longchamps, J. S., **203**.)

(*Leinekugel*, **91**, 234.)

Sommets d'autres coniques.

940. Connaissant le centre et un point d'une hyperbole équilatère, trouver le lieu des sommets et le lieu des foyers.

(J.-A. Serret, N. A., **143**.)

(*Murent*, **47**, 176-195.)

941. On donne une ellipse E de centre O et une droite D. Soient P, Q les projections d'un point quelconque M de D sur les axes de E. Trouver les lieux décrits par les sommets et les foyers d'une courbe semblable à E et passant par les points O, M, P, Q. (Neuberg, M., **158**.)

(*Bastin*, **83**, 240.)

942. Chercher le lieu des sommets des coniques circonscrites à un parallélogramme donné. Séparer, sur la courbe du quatrième degré qui forme le lieu, les régions contenant les sommets d'ellipses, d'hyperboles ou de paraboles.

(Barbarin, M., **335**.)

(*Gob*, **86**, 257.)

943. Chercher le lieu géométrique des sommets des coniques semblables à une conique donnée et doublement tangentes à une circonférence donnée O en deux points A, B tels que la

corde AB pivote autour d'un point fixe P. Examiner le cas où la conique donnée est une hyperbole équilatère ou une parabole.

(BARBARIN, M., 358.)

(*Brocard*, **87**, 139.)

944. On considère deux points donnés A, B comme les extrémités de l'un des diamètres conjugués égaux d'une ellipse; trouver le lieu des sommets et le lieu des foyers de cette courbe variable. (ALLERSMA, M., 370.)

(*Servais*, **86**, 112.)

945. On donne le sommet A et un point B d'une hyperbole équilatère. Démontrer que le second sommet, le centre, les deux foyers, le point de concours des tangentes ou des normales en A et B décrivent des cubiques. (NEUBERG, M., 392.)

(*Gob*, **87**, 141.)

946. Étant donnée une conique à centre rapportée à un foyer, trouver l'expression de la longueur de l'axe non focal. Application au lieu des sommets des ellipses qui ont un foyer et un point communs, et pour lesquelles la longueur du petit axe est la même. (J. M., 237.)

947. Étant donnée l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2(x\cos h+y\sin h-p)^2,$$

on demande de calculer en fonction des coefficients de cette équation : 1° les carrés des demi-axes de la courbe qu'elle représente, en distinguant dans les formules le grand axe et le petit axe lorsqu'il s'agit d'une ellipse; 2° les carrés a^2 et b^2 du demi-axe transverse et du demi-axe imaginaire, lorsqu'il s'agit d'une hyperbole. En conclure le lieu des sommets des ellipses qui ont un foyer, un point et la longueur du petit axe communs, en distinguant les sommets des grands axes et ceux des petits axes; et résoudre le même problème dans le cas de l'hyperbole.

(J. M., 247.)

948. On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$ et l'on considère les coniques osculatrices à cette parabole en son sommet (une courbe f est osculatrice à une courbe φ en un point M de celle-ci quand elle a, en ce point M, le plus grand nombre de points communs confondus avec M; en particulier, une conique est osculatrice à une conique φ en M, quand elle a en ce point quatre points communs avec φ). Montrer que : 1° le lieu des sommets de ces coniques est une parabole; 2° le lieu de leurs foyers est un cercle. (De Longchamps, J. M., **370**.)

(*Baron,* J. S., **82**, 94.)

949. On donne un point fixe O, et deux autres points : l'un A fixe, et l'autre B, mobile, mais restant à une distance invariable du point O; on demande le lieu des sommets et des foyers des ellipses qui ont pour centre commun le point O, et qui sont telles en outre que A et B soient les extrémités de deux diamètres conjugués. (Vazeille, J. S., **113**.)

(*Giat*, **87**, 231.)

950. On considère des hyperboles équilatères H qui ont pour centre un point fixe O et qui passent par un point fixe A.

Trouver le lieu décrit par les sommets réels de H.

Ce lieu est une lemniscate de Bernoulli. On propose, après avoir reconnu ce fait par le calcul, de l'établir géométriquement en prenant pour base de cette démonstration géométrique la propriété suivante :

Le produit des distances d'un foyer F *d'une hyperbole équilatère à deux points* A, A' *de la courbe, diamétralement opposées, est égal au carré de* $\frac{AA'}{2}$.

On établira d'abord géométriquement cette relation.
(De Longchamps, J. S., **195**.)

(*Delbourg,* **90**, 174, 251.)

LIEUX RELATIFS A D'AUTRES COURBES.

Courbes algébriques.

951. Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes a pour équation polaire $\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3} \omega$. (W. Roberts, N. A., **166.**)

(*P. Serret,* **48**, 98; **72**, 283.)

952. La longueur entière d'un quadrant de cette dernière courbe (lieu géométrique de la question précédente) est égale à trois fois la différence entre l'arc infini de l'hyperbole équilatère correspondante et son asymptote.

(W. Roberts, N. A., **167.**)

(*Faure,* **53**, 34.)

953. Trouver le lieu des centres des circonférences doublement tangentes à un limaçon de Pascal. (Brocard, N. A., **997.**)

(*Callandreau,* **72**, 508.)

954. On donne la parabole semi-cubique

$$x^3 - 3ay^2 = 0; \qquad (1)$$

d'un point quelconque du plan on peut mener trois tangentes à la courbe; désignons par (C) le cercle qui passe par les trois points de contact. Chercher :

1° Le lieu des points P pour lesquels le cercle (C) a un rayon constant;

2° Le lieu des points P pour lesquels le centre du cercle (C) est constamment sur la courbe (1);

3° Le lieu des points P pour lesquels le cercle (C) touche la courbe (1).

Résoudre les mêmes questions pour le cas de la parabole cubique

(2) $$x^3 - 3a^2y = 0.$$ (PAINVIN, N. A., **1155**.)

(*Laurans*, **75**, 277, 281.)

955. Lieu du point de la tangente à l'épicycloïde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

qui est conjugué harmonique du point de contact par rapport aux axes de coordonnées. (GAMBEY, N. A., **1268**.)

(*Lez*, **79**, 322; **80**, 94.)

956. Éliminer a et b entre les équations :

$$x = m \sin a \cos a \cos b, \qquad y = m \sin b \cos b \cos a, \qquad a + b = \theta,$$

θ étant l'angle des axes de coordonnées. Discuter l'équation résultante. (N. C., **2**.)

(*Van den Broeck*, **75**, 103.)

957. Trouver le lieu du point de concours de deux tangentes rectangulaires à la cardioïde [1]. (VOLSTENHOLME, N. C., **202**.)

(*Brocard, Neuberg*, **77**, 58, 61, 123, 231, 408) [2].

958. Sur la parabole cubique représentée par l'équation $x^3 = 2p^2y$, on prend un point A, et par ce point on mène la tangente AA_1 qui a son point de contact A_1 différent de A. Puis on tire d'une manière semblable les tangentes successives A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Chercher :

1° La limite de A_n, quand n devient infini.

2° La limite du point B_n qui a pour coordonnées la somme des abscisses et celles des ordonnées de A_1, A_2, ..., A_n, lorsque n

---

(1) On appelle ainsi la podaire d'une circonférence, le pôle étant pris sur la courbe. On a parfois donné le même nom — à tort — à l'hypocycloïde à quatre rebroussements.

(2) Indication d'une généralisation, d'après Chasles.

augmente indéfiniment, et le lieu du point B_n, lorsque n est constant et que A décrit la parabole donnée.

3° Le lieu du point C_n où se coupent les tangentes en A et A_n, lorsque, A_n étant fixe, A décrit la parabole donnée.

(BARBARIN, M., 336.)

(*Bastin,* **86**, 138.)

959. On fait passer par six points fixes d'un plan des cubiques ayant chacune un centre; déterminer le lieu de ces centres.

(J. S., 55.)

(*Bourgarel,* **88**, 237.)

960. Trouver le lieu des centres des cercles passant par le point de rebroussement d'une cardioïde, et tangents à la courbe en un autre point. Par le second point d'intersection de deux des cercles précédents, on mène une droite quelconque qui rencontre les deux cercles en A et A'. Démontrer que les tangentes aux cercles en A et A' se coupent sur la cardioïde.

(KŒHLER, J. S., 56.)

(*Corot,* **84**, 89.)

961. On donne la courbe dont l'équation est

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0.$$

1° On propose d'abord de construire cette courbe C; 2° soit M un point quelconque de C; on joint OM, et l'on trace une droite Δ symétrique de OM par rapport à la bissectrice de l'angle des axes; cette droite Δ rencontre la perpendiculaire élevée au point M à la droite OM en un point I. Démontrer que le lieu géométrique de ce point I est une hyperbole équilatère; 3° sur OI, on prend OI' = MI. Démontrer que le lieu du point I' est un cercle. (DE LONGCHAMPS, J. S., 58.)

(*Gindre,* **84**, 19.)

962. On considère une strophoïde droite S; par le sommet de la courbe, son point double, et un point M mobile sur S, on

fait passer une circonférence Δ; enfin par M on mène une parallèle à l'asymptote de S et cette parallèle rencontre Δ en un point I. Trouver le lieu de ce point.

Ce lieu est une circonférence; on donnera, après la solution analytique de ce problème, une démonstration géométrique du résultat trouvé. (DE LONGCHAMPS, J. S., 96.)

(*Leblond*, **84**, 284.)

963. On considère la courbe Γ qui correspond à l'équation

$$ay^2 = x^3.$$

Ayant pris sur l'axe de cette courbe un point P, sur OP comme diamètre (O est le point de rebroussement de Γ), on décrit un cercle Δ qui touche Γ en un point M; la tangente à Γ en ce point M coupe Δ en un point I. Vérifier que le lieu décrit par ce point I est la courbe unicursale qui correspond aux formules

$$\frac{x}{a} = \frac{t^4}{4+9t^2}; \qquad -\frac{y}{a} = \frac{t^3(2+3t^2)}{4+9t^2}.$$

(DE LONGCHAMPS, J. S., 146.)

(*De Kerdrel*, **86**, 117.)

964. On considère un triangle équilatéral de côté a et la courbe γ_4 qui correspond à l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \pm \frac{1}{\sqrt{y}} \pm \frac{1}{\sqrt{a-x-y}} = 0,$$

les axes de coordonnées étant deux côtés du triangle considéré :

1° Construire la courbe qui correspond à cette équation;

2° Par l'origine O, on mène une transversale qui rencontre γ_4, abstraction faite de l'origine, en deux autres points M, N; on prend le point I conjugué harmonique de O par rapport au segment MN. Trouver le lieu décrit par I : ce lieu est une cubique.

(DE LONGCHAMPS, J. S., 185.)

*965. Soit une courbe du quatrième degré ayant deux points doubles à l'infini. En général, il n'est pas possible de lui inscrire

un parallélogramme dont les côtés soient parallèles aux asymptotes. Si la chose est possible, elle l'est d'une infinité de manières. On demande alors le lieu des centres de ces parallélogrammes.

(CATALAN, J. S., 214.)

966. On donne dans un plan une circonférence C, une droite D et une direction Δ. On prend sur la circonférence C un point variable M; on mène la normale, en ce point, à la circonférence C; cette normale rencontre D en un point B. Par le point B on mène une parallèle à Δ. On demande le lieu du point de rencontre de cette parallèle et de la perpendiculaire abaissée, du point M, sur la droite D.

Nota. — Même problème, en remplaçant la circonférence C par une conique quelconque, par une courbe du troisième ordre, et plus généralement par une courbe d'ordre *m*.

(MALLOIZEL, J. S., 268.)

Courbes transcendantes ou quelconques.

967. Soient M un point pris sur une courbe plane et N un point sur la tangente en M à la courbe; par N menons une sécante sous un angle donné; et soit P un des points d'intersection; prenons sur la sécante un point Q sur le prolongement de NP, tel que l'on ait $NQ = \frac{\overline{MN}^2}{Nt}$; quel est le lieu du point Q, N se mouvant sur la tangente? et déterminer la position du point Q lorsque N se confond avec M. (MACLAURIN, N. A., 112.)

(*Drot*, **46**, 256.)

968. Démontrer que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une circonférence O sur les tangentes à la développante D de cette circonférence est une spirale d'Archimède. (MANNHEIM, N. A., 438.)

(*Laquière*, **60**, 186.)



969. Un cercle (C) de centre O roule sur une droite.

Trouver le lieu des points d'inflexion des cycloïdes raccourcies décrites par tous les points d'un cercle décrit sur un rayon du cercle (C) comme diamètre. (RIBAUCOUR, N. A., **860**.)

(*Brocard*, **71**, 234.)

970. Le lieu des sommets des triangles semblables à un triangle donné construits sur les rayons de courbure d'une épicycloïde (cycloïde) ordinaire, et d'un même côté de ces rayons de courbure, est une épicycloïde (cycloïde) allongée ou raccourcie. (FOURET, N. A., **932**.)

(*Moret-Blanc, Fouret*, **75**, 71; **80**, 63.)

971. Une corde glisse sur une courbe quelconque, de façon à détacher un segment d'aire constante φ. Le centre de gravité du segment décrit une courbe (C) dont le rayon de courbure est proportionnel au cube de la longueur de la corde. (PETERSEN, N. A., **1050**.)

(*Pellet*, **72**, 553.)

972. Soit une famille de courbes planes représentées par l'équation $f(x, y, a) = 0$, a étant un paramètre variable; trouver :

1° Le lieu des points où la tangente est parallèle à une droite donnée.

2° Le lieu des points où le rayon de courbure a une grandeur donnée;

Application aux paraboles de même axe et de même sommet, aux ellipses ayant un axe commun. (LAISANT, N. A., **1224**.)

(*Moret-Blanc*, **77**, 326.)

973. On prend sur la tangente à une cycloïde fixe, à partir du point de contact, une longueur proportionnelle au rayon de courbure de ce point; trouver le lieu de l'extrémité de cette longueur quand la tangente se déplace. (BARBARIN, N. A., **1316**.)

(*Lez, Fouret*, **79**, 475; **80**, 63.)

*974. Si par le pôle de l'une des courbes ayant pour équation

$$\rho^n = a^n \sin n\theta \text{ (1)},$$

nommées orthogénides par M. Allegret, on mène une droite, les tangentes à la courbe, aux points d'intersection avec la droite, forment un triangle équilatéral, lorsque $n = \pm \frac{1}{3}$. Trouver le lieu du centre de ce triangle, si la droite tourne autour du pôle.

(E. Lucas, N. C., 144.)

975. A partir de chaque point d'une chaînette, représentée par

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on prend, sur l'ordonnée, un segment égal : 1° à l'arc, 2° à la tangente, 3° à la normale. Trouver les lieux des divers points ainsi obtenus. (Brocard, N. C., 204.)

(*Freson*, 77, 278.)

*976. Si l'on considère le lieu C′ des centres de gravité des arcs d'une courbe C, comptés à partir d'un point fixe A; le point de contact G, de la tangente à C′, menée par un point quelconque P de la courbe C, est le centre de gravité de l'arc AP.

(Cesaro, N. C., 430.)

*977. Soit G le centre de gravité du segment formé par une courbe ABC et un rayon vecteur AP; soit AGG′ le lieu du point G. La tangente en G passe au point M que l'on obtient en prenant sur PA, $PN = \frac{1}{3}$ PA. (Catalan, N. C., 431.)

978. Une figure quelconque se meut dans son plan, parallèlement à elle-même et de façon que son produit d'inertie (2), par

---

(1) *Voir* un article de M. Haton de la Goupillière, N. A., 76, 97.

(2) On appelle produit d'inertie d'un élément de surface S le produit de cet élément par les coordonnées du point S, rapporté à deux axes rectangulaires.

On appelle produit d'inertie d'une figure fermée la somme des produits d'inertie de ses éléments. (*Note de l'Auteur*.)



rapport à deux axes rectangulaires, reste constant. Quel est le lieu géométrique décrit par le centre de gravité de la figure? (CESARO, N. C., 504.)

(*Mangon,* **80**, 86.)

979. On donne une courbe C et un point fixe O. La circonférence décrite de O comme centre et passant par un point M de C rencontre la tangente et la normale menées en M aux points T et N; construire les tangentes aux lieux décrits par T et N. (NEUBERG, M., 325.)

(*Meurice,* **87**, 273; **88**, 70.)

980. Étant donnés une courbe (C) et deux points fixes O, A, on porte sur un rayon vecteur quelconque OC de la courbe une longueur CD, telle que le triangle ACD ait une surface constante. Trouver : 1° l'équation de la courbe (D); 2° la tangente à cette ligne par une construction géométrique. Le lieu (D) est une conchoïde de Nicomède, lorsque (C) est une circonférence ayant pour centre O; il se compose de deux hyperboles, lorsqu'on prend pour (C) une droite. (MEURICE, M., 546.)

(*Derousseau,* **88**, 122.)

981. Trouver le lieu du foyer d'une parabole touchant une logarithmique (équation $y = e^x$) en un point variable M et l'axe des x au pied de l'ordonnée de M. (BROCARD, M., 702.)

(*Hacken,* **91**, 123.)

982. 1° On prend sur la tangente à une courbe fixe, à partir du point de contact, une longueur proportionnelle à la normale en ce point. Trouver le lieu de l'extrémité de cette longueur quand la tangente se déplace; 2° on prend sur la normale à une courbe fixe, à partir du pied de la normale à la courbe, une longueur proportionnelle à la tangente à ce point. Trouver le lieu du point ainsi obtenu quand la normale se déplace. Application aux coniques et à la cycloïde. (JULLIARD, J. M., 319.)

SIXIÈME PARTIE.

ENVELOPPES.

ENVELOPPES DE DROITES.

Enveloppes relatives à des figures rectilignes.

983. Démontrer que la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur les côtés d'un angle droit est une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence quatre fois plus grande.

(STURM, N. A., **39**.)

(*Breton de Champ,* **43**, 312, 496.)

984. L'enveloppe des bases de tous les triangles rectilignes qui ont un angle commun et même périmètre est un cercle.

Même propriété pour le triangle sphérique. (N. A., **137**.)

(*Cabussi de Bajor,* **47**, 25, 99.)

985. Deux droites fixes A, A′ et deux points fixes O, O′ sont donnés dans un même plan. Une molécule M parcourt la première droite avec un mouvement représenté par l'équation

$$e = a + bt,$$

et une molécule M′ parcourt la seconde droite A′ avec un mouvement représenté par l'équation

$$e = a' + b' t;$$

e désigne l'espace, t le temps et a, b, a', b' sont des constantes données. S et S' étant deux positions *simultanées* des deux molécules, on demande : 1° de trouver l'équation du lieu géométrique de l'intersection des deux droites OS, O'S'; 2° l'équation de l'enveloppe de la droite SS'; 3° de démontrer qu'il existe une relation *homographique* entre les points S et S'. (N. A., **378**.)

(*Grassat*, **65**, 225.)

986. Mêmes données géométriques que dans la question précédente; le mouvement du point M est donné par l'équation

$$e = at$$

et celui du point M' par

$$et = a';$$

on demande de trouver : 1° l'équation du lieu géométrique de l'intersection des droites OS, OS'; 2° l'équation de l'enveloppe de la droite S, S'; 3° de démontrer qu'il existe entre les points S et S' une relation d'*involution*. (N. A., **379**.)

(*Grassat*, **65**, 228.)

987. Quelle est l'enveloppe de la droite dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est donnée?

(N. A., **436**.)

(*Brault*, **60**, 141.)

988. Soit construit un triangle MNO; le sommet N est fixe ainsi que les *directions* des côtés NM et NO, le côté MO a une longueur *donnée;* par conséquent, il touchera une certaine courbe; le point de contact sur chaque tangente MO est aussi éloigné de M que la projection orthogonale de O est éloignée de N [1]; cette courbe, nommée *hypocycloïde*, est fermée et

---

[1] L'équation de cette courbe a été trouvée par Joachimsthal.

(N. A., **47**, 260.)

composée de quatre branches correspondant aux quatre angles des directions NM, NO. (Böklen, N. A., **616**.)

[*Siacci*, **62**, 328, 457 [1]; **63**, 34.]

989. Les droites inscrites dans un angle droit donné, et qui ont leurs milieux sur une droite rencontrant les côtés de l'angle droit en des points différents, sont toutes tangentes à la même parabole. (N. A., **627**.)

(*Schnée*, **62**, 447, 469.)

990. Les extrémités A et B d'une longueur constante $AB = l$ se meuvent sur les côtés d'un angle droit fixe AOB : trouver l'enveloppe de la perpendiculaire BM à AB; calculer la position des points de rebroussement et mener les tangentes en ces points. (Brocard, N. A., **1029**.)

(*Pellissier, Brocard*, **73**, 459; **74**, 446; **85**, 145.)

***991.** ABC étant un triangle donné, on le coupe par une transversale qui détermine sur des côtés ou leurs prolongements six segments, tels que le produit de trois d'entre eux non consécutifs soit constant. Trouver l'enveloppe de la transversale. (Barbarin, N. A., **1359**.)

992. Soit K la courbe enveloppée par une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes. Démontrer que toute courbe parallèle à K peut être engendrée de la même façon. (Laguerre, N. A., **1391**.)

(*D'Ocagne*, **83**, 425.)

993. On donne, dans un plan, deux points fixes O, A. Du point A, on mène une droite quelconque AB, sur laquelle le point O se projette en B. On joint le point B au milieu C de OA, et l'on mène BB′ perpendiculaire à BC : le point O se projette en B′ sur BB′. On joint le point B′ au milieu C′ de OB; et ainsi

(1) Généralisations.

de suite. Le lieu des points B et l'enveloppe des droites AB, BB', ... sont des spirales équiangles.

De ce théorème, on déduit une propriété des podaires successives d'une courbe plane, et la propriété de la spirale équiangle d'être à elle-même sa podaire. (BROCARD, N. C., 59.)

(**79**, 202, 235) ([1]).

994. Étant donnés, dans un même plan, deux triangles quelconques, on déplace l'un d'eux parallèlement à lui-même, de manière qu'il devienne homologique à l'autre. Trouver le lieu du centre d'homologie et l'enveloppe de l'axe d'homologie. (NEUBERG, M., 525.)

(*Neuberg*, **90**, 230.)

995. Une droite issue du sommet A d'un triangle ABC coupe le côté opposé en un point variable D. La bissectrice de l'angle ADB coupe AB en E; celle de l'angle ADC coupe AC en F. Trouver 1° le lieu du point de rencontre des droites AD, CE, BF; 2° l'enveloppe de la droite EF. (DE ROCQUIGNY, M. 529.)

(*Brocard*, **87**, 167.)

996. Si deux droites AD, BE tournent autour de leurs extrémités A, B avec la même vitesse angulaire : 1° le point M qui divise la droite DE dans un rapport donné $m : n$ décrit une circonférence; 2° il existe un point fixe S tel que le triangle SDE est de forme constante; 3° la droite DE enveloppe une conique ayant pour foyer le point S; elle est divisée par son point de contact en deux parties proportionnelles aux projections de AD, BE sur DE. (NEUBERG, M., 587.)

(*Meurice*, **89**, 198.)

997. On considère tous les triangles qui ont un sommet fixe A, et les deux autres sommets B, C sur une droite donnée; la lon-

---

([1]) Généralisation.

gueur BC est également donnée. Trouver les enveloppes des hauteurs issues de B et C. (Déprez, M., 620.)

(*François*, **89**, 255.)

998. On donne deux droites fixes Δ, Δ', qui se coupent en A, et un point B sur Δ. D'un point C, mobile sur Δ', on abaisse sur Δ une perpendiculaire qui coupe cette droite en C'. A partir de C', on porte sur Δ, dans un sens déterminé, une longueur C'D constante. On demande :

1° L'enveloppe de CD;

2° Le lieu du point G d'intersection de CC' avec la perpendiculaire à CD issue du point B. (Troille, J. S., 207.)

(*Russo*, **90**, 94.)

999. On inscrit à un triangle ABC tous les triangles A'B'C' ayant même centre de gravité G. Démontrer que les côtés B'C', C'A', A'B' enveloppent trois paraboles. (Neuberg, J. S., 266.)

(*Leinekugel*, **90**, 22; **91**, 249.)

Enveloppes relatives à un cercle.

***1000.** Soit D_0 un cercle, D_1 une développante de D_0, D_2 une développante de D_1, ..., D_n une développante de $D_{(n-1)}$. Appelons D_n *développante du cercle de l'ordre n*. Cela posé, on propose de démontrer le théorème suivant. Si une figure plane varie en restant semblable à elle-même, et si trois droites de cette figure ont chacune pour enveloppe une développante de cercle de l'ordre n, toute autre droite de la figure a pour enveloppe une développante de cercle du même ordre.

(P. de Laffitte, N. A., 480.)

1001. On donne un cercle et un point O fixe sur la circonférence; par ce point on mène une corde arbitraire OM sur la direction de laquelle on porte une longueur ON, telle que

$$ON^2 = OM^2 + \text{const.};$$

par le point N, on mène une perpendiculaire à ON : trouver l'enveloppe de cette perpendiculaire. (DUPAIN, N. A., **840**.)

(*Morges*, **68**, 447.)

1002. Par un point fixe O, pris sur la circonférence d'un cercle, on mène deux cordes OA, OB dont le produit est constant; on demande l'enveloppe de la sécante AB.

(DUPAIN, N. A., **844**.)

(*De Lajudie*, **68**, 187.)

***1003.** Un triangle est inscrit dans une circonférence. On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque A de la circonférence sur les trois côtés du triangle sont en ligne droite.

Trouver l'enveloppe de cette ligne, quand le point A se déplace sur la circonférence. (DE TEYSSIÈRE, N. A., **868**.)

1004. On donne un cercle C tangent à une droite D en O. D'un point M de la circonférence on mène MA perpendiculaire à D, et l'on prend AB = AO. On joint BM, et l'on demande l'enveloppe de la droite BM quand le point M se déplace sur la circonférence.

L'enveloppe cherchée admet trois axes de symétrie et trois points de rebroussement remarquables.

(BROCARD, N. A., **898**.)

(*Millasseau*, **69**, 418, 470.)

1005. Un angle de grandeur constante se déplace dans un plan, de manière que le sommet décrive un cercle de rayon donné, et que l'un des côtés passe par un point fixe : on demande l'enveloppe de l'autre côté. (HARKEMA, N. A., **1031** *bis*.)

(*Pellissier*, **72**, 44, 216.)

1006. Soient O un point fixe dans le plan du cercle PQR et OPQ une sécante sur laquelle on prend un point S, de manière

que $\overline{OS} = \lambda OP + \mu OQ$ (λ et μ étant des constantes) : démontrer que l'enveloppe d'une perpendiculaire à PQ, menée par le point S, est une conique. (GENESE, N. A., 1230.)

(*Berthomieu,* **78**, 46, 48.)

1007. On prend un point A sur un diamètre fixe d'une circonférence donnée; soit ABC le triangle isoscèle d'aire maximum, tel que B, C soient des points de la circonférence donnée et que BC soit perpendiculaire sur le diamètre passant par A. Trouver l'enveloppe de la droite AC quand A se meut sur le diamètre fixe. (LEMOINE, N. A., 1261.)

(*Michel,* **78**, 469.)

1008. D'un point P pris sur une tangente en C à un cercle, on mène une sécante PAB telle que la surface du triangle ABC soit maximum; trouver l'enveloppe de cette sécante quand le point P se meut sur la tangente. (FAUQUEMBERGUE, N. A., 1283.)

(*Moret-Blanc,* **81**, 518.)

1009. On donne, dans une circonférence, deux rayons fixes OA, OB. On joint un point M de la courbe aux points B, A, ce qui détermine, sur les rayons OA, OB, les points C et D. On demande :

1° L'enveloppe de la droite CD, lorsque le point M parcourt la circonférence;

2° Le lieu du point I, intersection de CD avec OM.

(BROCARD, N. C., 167, M., 231.)

(*Jerabek,* M., **84**, 155.)

*__1010.__ Étant données une circonférence fixe et une droite fixe OCE, qui la coupe au point O, on projette un point I de la circonférence sur la droite OC, en I', et l'on prend I'E = I'O.

Trouver l'enveloppe de la droite EI. (BROCARD, N. C., 203.)

1011. D'un point P, pris sur la tangente en C à un cercle, on mène une sécante PAB, telle que la surface du triangle ABC

soit maximum. Trouver l'enveloppe de cette sécante, lorsque le point P se meut sur la tangente.

(Fauquembergue, N. C., **582**, M., **490**.)

(M., **89**, 192.)

1012. On donne deux droites OX, OY et un point A. Par les points O, A on fait passer une circonférence quelconque coupant OX en B, OY en C. Trouver : 1° le lieu du centre de gravité du triangle ABC; 2° l'enveloppe du côté BC; 3° les positions pour lesquelles le triangle ABC a une aire donnée.

(Barbarin, M., **213**.)

(*Derousseau*, **84**, 89.)

1013. On donne un point A et une circonférence O. Autour de A tourne une sécante coupant la circonférence en B et C. Trouver et construire : 1° dans le triangle BOC, les lieux géométriques du point de rencontre des hauteurs, du centre de gravité et du centre de la circonférence circonscrite; 2° le lieu géométrique de la projection M de B sur OC, et l'enveloppe de BM; 3° le lieu géométrique de la projection N de B sur la tangente au point C, et l'enveloppe de BN; 4° l'enveloppe de la droite CB′ qui joint le point C au point B′ diamétralement opposé à B. (Barbarin, M., **340**.)

(*Pisani*, **86**, 259.)

1014. Soient AB un diamètre fixe d'une circonférence, N la projection d'un point quelconque M de cette courbe sur AB, P le milieu de AN; trouver l'enveloppe de la perpendiculaire élevée au milieu de la droite MP. (Brocard, M., **347**.)

(*Mosnat*, **87**, 193.)

1015. Par deux points fixes A, B, on fait passer un cercle quelconque, coupant une droite donnée L aux points C, D. Les droites AC et BD se rencontrent en M, AD et BC en N. Trouver : 1° le lieu des points M et N; 2° l'enveloppe de la droite MN.

(Farisano, M., **526**.)

(*Brocard*, **87**, 164.)

1016. On donne un point O et une droite CD sur laquelle on abaisse de O une perpendiculaire OC. Une circonférence passant par O et touchant CD en un point variable E, rencontre OC au point A. Trouver le lieu de la projection M de A sur la droite EO, et l'enveloppe de la droite AM. (MANDART, M., **611**.)

(*Jerabek*, **89**, 99.)

1017. Soient AB un diamètre d'une circonférence et CD une corde perpendiculaire à AB au point E. Si a, b, c, d sont les distances des points A, B, C, D à une droite quelconque L et $(\lambda : \mu)$ le rapport des segments BE, AE, démontrer la relation

$$\lambda a^2 + \mu b^2 = (\lambda + \mu)\left(cd + \overline{CE}^2\right);$$

déduire de là l'enveloppe d'une droite L satisfaisant à la condition $\lambda a^2 + \mu b^2 = \text{const.}$ (M' CAY, M., **630**.)

(*Verniory*, **89**, 203.)

1018. Soit une circonférence Δ; on prend, dans ce cercle, un diamètre fixe AB. Par un point M, mobile sur Δ, on trace une droite rencontrant AB en P et telle que PMB soit un triangle isoscèle.

1° Démontrer que le lieu des centres des cercles circonscrits à PMB est une strophoïde;

2° Trouver le lieu décrit par le pôle de MP et construire ce lieu, qui est une cubique unicursale;

3° Trouver l'enveloppe de la droite PM.

(DE LONGCHAMPS, J. S., **261**.)

(*Leinekugel*, **91**, 213.)

1019. Soit O le centre d'une circonférence Δ. En un point M, mobile sur Δ, on trace la tangente, qui rencontre en A une droite fixe, passant par O.

1° On demande l'enveloppe Γ de la bissectrice δ de l'angle MAO.

2° Le rayon OM rencontre en B la perpendiculaire élevée, en A, à la droite AO. De B, comme centre, avec BA pour rayon,

on décrit un arc de cercle qui coupe δ en un point C. Trouver le lieu de ce point C.

3° Ce dernier lieu coïncide avec l'enveloppe trouvée plus haut. On propose de vérifier ce résultat, *a priori,* en résolvant la question suivante :

On donne une courbe U *et une droite* OA; *la tangente en un point* M, *mobile sur* U, *coupe* OA, *en* A; *déterminer le point où la bissectrice de* MOA *touche son enveloppe.*

4° L'enveloppe Γ est une parabole, de foyer O. Déduire, de ce résultat, le théorème suivant :

Soit CD *la corde focale principale d'une parabole* P; *on considère une droite mobile* K, *tangente à* P, *et l'on prend la droite* K′, *symétrique de* CD, *par rapport à* K; *le lieu des projections du foyer sur* K′ *est une circonférence.*

5° En considérant les deux bissectrices des angles formés par AO avec la tangente en M, on obtient, pour l'enveloppe de ces droites, deux paraboles.

Déduire de là que *si l'on considère deux paraboles égales et opposées, ayant pour corde commune la corde focale principale, les tangentes issues d'un point de cette corde sont deux à deux rectangulaires.* (De Longchamps, J. S., **312** *bis.*)

(*Sollertinsky,* **91**, 238.)

Enveloppes relatives à deux ou plusieurs cercles.

1020. On donne sur le même plan deux circonférences O, O′ et un point fixe P; on décrit des circonférences passant par P et tangentes à O, l'on prend les axes radicaux de ces circonférences et de O′; on demande l'enveloppe de ces droites. Déterminer *directement* le point de contact de chaque axe radical avec cette enveloppe. (Mannheim, N. A., **612**.)

(*Delafond,* **62**, 342.)

1021. Soient O un cercle fixe, O′ un cercle mobile dont le

centre se déplace sur un autre cercle fixe O''; l'axe radical des deux premiers a pour enveloppe de ses positions une conique.

(Durrande, N. A., **702**.)

(*De Meyer*, **64**, 388.)

*1022. On a deux cercles dans un même plan; le premier est parcouru d'un mouvement uniforme par un point M, et le second est parcouru en sens inverse et d'un mouvement uniforme par un point m; la droite élevée à chaque instant par le milieu de la corde Mm perpendiculairement à cette corde enveloppe une conique; construire cette conique.

Trouver la propriété analogue dans l'espace.

(Laguerre, N. A., **1092**.)

1023. On donne, sur un même plan, deux cercles fixes A, B et le rayon d'un troisième cercle C, mobile et tangent extérieurement au cercle A. Trouver l'enveloppe de l'axe radical des circonférences B et C. (Harkema, N. A., **1147**.)

(*Lez*, **74**, 349.)

1024. On donne un cercle et un point fixe dans le plan du cercle; des différents points de la circonférence pris pour centres, on décrit des cercles passant par les points fixes; trouver l'enveloppe des cordes d'intersection (réelles ou imaginaires) du cercle donné et des cercles décrits. (Harkema, N. A., **1198**.)

(*Goulin*, **76**, 284.)

1025. On donne sur un plan un point fixe P, un cercle O et un point A sur la circonférence de ce cercle. Une seconde circonférence O' variable passe constamment sur le point A, et son centre est situé sur la circonférence O; déterminer l'enveloppe des polaires du point P, par rapport à O'.

(Laisant, N. A., **1211**.)

(*Guillet*, **76**, 379.)

1026. Le centre d'un cercle O de rayon constant se déplace

dans son plan sur la circonférence d'un cercle fixe O'. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe P, par rapport au cercle O. (LAISANT, N. A., **1265**.)

(*Moret-Blanc*, **78**, 471.)

1027. Trouver, géométriquement, l'enveloppe des droites qui donnent des cordes égales dans deux cercles donnés. (TAYLOR, N. C., **117**.)

(*Laisant*, **77**, 356; **78**, 24, 46.)

1028. Étant données deux circonférences O, O', on mène deux rayons OA, O'A', faisant entre eux un angle donné. Démontrer que la droite AA', qui joint les extrémités de ces rayons, enveloppe une conique, et que le point de contact la divise en deux segments proportionnels aux cordes qu'elle détermine dans les cercles donnés. (NEUBERG, N. C., **252**.)

(*Neuberg*, **80**, 463, 514.)

1029. Une figure, de grandeur invariable, se meut dans son plan, où deux de ses droites ont chacune un cercle pour enveloppe; toutes les droites du plan ont alors des cercles pour enveloppes. Les centres des cercles enveloppes d'un système de droites forment, trois à trois, des triangles semblables au triangle symétrique du triangle des trois droites enveloppantes. Entre les côtés a, b, c du triangle mobile et les rayons α, β, γ des cercles enveloppés correspondants, on a la relation

$$2T = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

T représentant l'aire du triangle [1]. (LAQUIÈRE, N. C., **571**.)

1030. Une infinité de circonférences se touchent en un même point O. On prend sur chacune d'elles, à partir de O, un arc de longueur constante. On demande : 1° de trouver l'équation du lieu C de l'extrémité de cet arc et de construire la tangente à C; 2° de trouver l'équation de l'enveloppe E du rayon qui

[1] *Voir* N. C., **80**, 417.

passe par l'extrémité de l'arc et de déterminer le point de contact de ce rayon; 3° de démontrer que C est la podaire de O par rapport à E. (NEUBERG, M., 257.)

(*Neuberg*, **85**, 89.)

1031. Étant donnés quatre points A, B, C, D, trouver le lieu géométrique du point de contact de deux circonférences variables tangentes entre elles et passant, l'une par A et B, l'autre par C et D. Trouver l'enveloppe de la tangente commune.

(BARBARIN, M., 428.)

(*Verniory*, **88**, 254.)

1032. Sur les côtés AB et AC d'un triangle donné, on décrit deux cercles égaux de rayon variable. Trouver le lieu du second point d'intersection et l'enveloppe de la ligne des centres.

(M., 452.)

(*Gob*, **88**, 95.)

1033. On donne trois points A, B, C. Deux circonférences variables dont l'une passe par A et B, l'autre par A et C, se coupent sous un angle donné φ. Trouver : 1° le lieu du second point d'intersection des deux circonférences; 2° le lieu du point de rencontre des tangentes menées par B et C; 3° l'enveloppe de la ligne des centres. (GOB, M., 472.)

(*Jerabek*, **88**, 73.)

1034. On donne deux circonférences O, O′ dont la seconde passe par le centre de la première. Soient F, F′ deux points fixes de la circonférence O′ symétriques par rapport à la ligne des centres OO′. Démontrer que les droites joignant un point variable M de la circonférence O′ aux points F, F′ rencontrent la circonférence O en quatre points A, B, A′, B′, tels que deux côtés opposés du quadrilatère ABA′B′ enveloppent une circonférence, et les deux autres une conique. (NEUBERG, M., 542.)

(*Déprez*, **87**, 75.)

1035. On décrit deux cercles tangents entre eux et touchant,



respectivement, les côtés des angles B et C du triangle ABC. Trouver : 1° le lieu du point de contact de ces cercles; 2° l'enveloppe de la ligne des centres [1]. (M., **552.**)

(*Déprez*, **89**, 524.)

1036. Par les sommets A et B, C et D d'un quadrilatère, on fait passer deux circonférences variables, telles que le rapport des rayons soit constant. Démontrer que leur axe radical enveloppe une conique. (Déprez, M., **606.**)

(*Brocard,* **88**, 259.)

1037. On donne, sur un même plan, une droite Δ et un cercle fixes : soit Γ' un second cercle mobile, de rayon invariable, tangent à Δ. Trouver :

1° L'enveloppe de l'axe radical δ des circonférences Γ et Γ';

2° Le lieu du point de rencontre de δ avec la ligne des centres des circonférences Γ, Γ'. (Russo, J. S., **287.**)

(*Brocard,* **92**, 46.)

Enveloppes relatives à des ellipses.

1038. Considérons comme coordonnées rectangulaires d'un point les rayons de courbure des extrémités des diamètres conjugués d'une même ellipse; le lieu des points est l'enveloppe d'une droite de longueur constante, inscrite dans un angle droit. (Brassinne, N. A., **105.**)

(*Schnée*, **63**, 12.)

1039. On projette un point d'une ellipse sur ses deux axes; démontrer que l'enveloppe de la droite qui joint les deux projections est la développée d'une ellipse.

Même question pour l'hyperbole. (N. A., **401.**)

(*Chanson, Challiot,* **58**, 113, 429.)

---

[1] Cette question se rattache au célèbre problème de Malfatti. (*Note de la Rédaction.*)

1040. Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur; trouver le lieu des milieux de ces cordes. (LEMOINE, N. A., **1081**.)

(*Desmons, Doucet,* **73**, 29; **74**, 334.)

1041. Soit ABC un triangle de surface maximum inscrit dans une ellipse E. Démontrer que les cercles osculateurs à l'ellipse aux sommets de ce triangle, le cercle circonscrit et l'ellipse ont un point commun P.

Soit P′ le symétrique de P par rapport au centre de l'ellipse; prouver que les droites P′A, P′B, P′C enveloppent une développée d'ellipse. (LEMAIRE, N. A., **1603**.)

(*J. G. Darboux,* **91**, 20*.)

1042. Le cercle osculateur en un point M d'une ellipse rencontre cette courbe en un point M_1; le cercle osculateur en M_1 rencontre l'ellipse en M_2 et ainsi de suite. On demande : 1° d'examiner dans quel cas la ligne brisée $MM_1M_2M_3\ldots$ se ferme; 2° de démontrer que les enveloppes des droites

$$MM_1,\ MM_2,\ MM_3,\ \ldots$$

sont des projections orthogonales d'épicycloïdes.

(NEUBERG, M., **455**.)

(*Molenbroek,* **89**, 191.)

1043. Mener, en un point quelconque M d'une ellipse, deux cordes supplémentaires MN, MP, également inclinées sur la normale MR. Trouver le lieu des pôles et l'enveloppe des cordes MN, MP. (M. **544**.)

(*Brocard,* **87**, 236.)

1044. Les axes d'une ellipse sont dirigés suivant deux droites rectangulaires données Ox, Oy. Soit M le point de cette ellipse où le cercle osculateur a la même surface que l'ellipse; soit μ le centre de ce cercle; 1° la distance du centre de ce cercle osculateur au centre de l'ellipse est égale à la demi-différence des

axes; 2° si la somme des axes de l'ellipse reste constante, le lieu de M est l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui glisse sur les deux droites Ox, Oy, et le lieu de μ est la rosace à quatre branches, lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur une droite de longueur constante qui glisse sur les bissectrices des angles des axes.

(LEMOINE, J. M., **388**.)

(*Gino-Loria*, J. S., **82**, 202; **83**, 128.)

1045. Lieu des centres des cercles coupant l'ellipse en quatre points tels que trois d'entre eux soient les sommets d'un triangle équilatéral.

Ce lieu est une ellipse.

Enveloppe de la droite qui joint le centre au quatrième point, et lieu du milieu de cette droite; on trouvera pour l'enveloppe demandée une développée d'ellipse; le dernier lieu est une ellipse.

(J. S., **223**.)

(*Rezeau*, **90**, 210.)

1046. Du pôle d'une normale en M à une ellipse donnée on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre qui passe par ce point : cette droite rencontre en P ce diamètre, en Q la normale en M à l'ellipse, et en R la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la tangente en M à cette courbe. On demande les lieux décrits par P, Q, R et l'enveloppe de la droite PQR, lorsque M parcourt l'ellipse donnée.

(MANNHEIM, J. S., **248**.)

(*Brocard*, **90**, 284.)

1047. Soient PA, PB, PC, PD les quatre normales issues d'un point quelconque P à une ellipse.

1° Si la droite AB tourne autour d'un point fixe M, la corde CD enveloppe une parabole tangente aux deux axes. Réciproque.

2° Trouver le lieu des foyers de ces paraboles lorsque le point M parcourt une droite donnée. (L. LÉVY, J. S., **252**.)

(*Assolant*, **91**, 209.)

Enveloppes relatives à des paraboles.

1048. On suppose que des rayons perpendiculaires à l'axe d'une parabole soient, à leur rencontre avec cette courbe, réfléchis de manière que l'angle de réflexion égale l'angle d'incidence : trouver l'enveloppe des rayons réfléchis, et déterminer géométriquement le point de contact d'un rayon réfléchi et de l'enveloppe. (N. A., **636**.)

(*Noblot, Quantin,* **63**, 97, 100.)

1049. On donne une parabole et un cercle ayant pour centre le sommet de cette parabole. Chaque point de la circonférence de ce cercle étant pris comme pôle, on trace la polaire correspondante. Déterminer l'enveloppe de toutes ces droites.

(Laisant, N. A., **789**.)

(*Nouaux,* **67**, 38, 40.)

1050. Une ellipse donnée se meut à l'intérieur d'une parabole fixe donnée de manière à toucher cette parabole en deux points.

On demande le lieu décrit par le centre de l'ellipse mobile et l'enveloppe de la droite qui passe par les deux points de contact.

(Dauplay, N. A., **900**.)

(*Bourguet,* **74**, 425; **75**, 236) [1].

1051. Une parabole P, de paramètre constant, se meut dans un plan parallèlement à elle-même, de façon que chacun de ses points décrive une parabole P′ de paramètre donné, dont l'axe soit parallèle à celui de la parabole mobile. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe donné par rapport à la parabole P.

Même question en supposant la parabole P′ remplacée par une droite de direction quelconque. (Laisant, N. A., **1288**.)

(*Gambey,* **79**, 326.)

---

[1] *Voir* surtout la seconde solution (**75**, 236).

1052. On donne une parabole et un point dans son plan; par ce point on mène une sécante quelconque, et sur la corde ainsi déterminée, prise comme diamètre, on décrit un cercle; trouver l'enveloppe de la polaire du sommet de la parabole par rapport à ce cercle. (WOLSTENHOLME, N. A., **1544**.)

(*Moret-Blanc,* **85**, 533.)

1053. I. D'un point quelconque P d'une parabole, on abaisse les deux normales PA, PB, rencontrant la parabole en A, B. Trouver : 1° l'équation de la droite AB; 2° le lieu de la projection du point P sur AB.

II. On mène par le point P des perpendiculaires à PA et PB; ces droites rencontrent la parabole aux points C et D; trouver : 1° l'équation de la droite CD; 2° l'enveloppe de CD; 3° le lieu de l'intersection de AB et CD; 4° le lieu de la projection du point P sur CD; 5° le lieu de l'intersection de CD avec la tangente au point P; 6° le lieu de l'intersection de CD avec la normale au point P.

III. On mène, par le point P, les bissectrices de l'angle APB; ces droites rencontrent la parabole aux points E et F; trouver : 1° l'équation de EF; 2° le lieu de l'intersection de EF avec AB; 3° avec CD; 4° avec la tangente en P à la parabole; 5° avec la normale en P; 6° avec la perpendiculaire abaissée du point P sur EF; 7° l'enveloppe de EF. (E. LUCAS, M., **37**, **38**, **39**.)

(*Brocard, Gerondal,* **83**, 36; **84**, 128.)

1054. On donne une parabole fixe et une autre parabole égale, qui se déplace en restant tangente à la première. Les axes des deux courbes étant perpendiculaires l'un à l'autre, on demande l'enveloppe de la corde commune. (BROCARD, M., **54**.)

(*Pisani,* **82**, 20.)

1055. Chercher l'enveloppe de la droite qui joint les projec-

tions d'un point quelconque d'une parabole sur l'axe et sur la tangente au sommet. (Par le calcul et par la géométrie.)

(Gillet, M., 363.)

(*Gilbert*, **85**, 212.)

1056. Le cercle osculateur ω en un point quelconque M d'une parabole rencontre la courbe en un second point N, et le cercle osculateur ω' qui touche la courbe en N la rencontre en un point P; ces deux cercles se rencontrent en un point Q autre que N. Démontrer 1° que les droites MN, MP, NQ enveloppent des paraboles; 2° que la ligne des centres $\omega\omega'$ enveloppe une parabole semi-cubique; 3° que les milieux des côtés du triangle MNP et le centre de gravité décrivent des paraboles du second degré; 4° que le point Q se meut sur une quartique; 5° que le centre du cercle MNP parcourt une cubique.

(Neuberg, M., 381.)

(*Jerabek*, **87**, 252.)

1057. Une parabole variable U touche une parabole fixe V en un point M et l'axe de V au pied de l'ordonnée de M. Le lieu du foyer de U est une cissoïde; la tangente au sommet enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements; le lieu du pied de la directrice est une quintique; le centre du cercle osculateur de U en M décrit une parabole semi-cubique.

(Déprez, M., 735.)

(*Cristesco*, **92**, 201.)

1058. On considère une parabole P, et sur cette courbe un point C. Soit N la normale en ce point.

1° Trouver sur cette normale un point D tellement choisi que le cercle S décrit de D comme centre avec DC pour rayon rencontre P en deux points A et B, en ligne droite avec D.

2° Démontrer que la surface du segment parabolique qui a pour corde AB est constante quand le point C se déplace sur la courbe P.

3° Équation générale de la droite AB. Démontrer au moyen de cette équation que l'enveloppe est une parabole égale à la proposée.

4° Reconnaître que cette enveloppe se confond avec le lieu des centres des cercles S. Expliquer cette coïncidence.

5° Aux cercles S, on mène des tangentes parallèles à la droite A'B. Démontrer que le lieu des points de contact est formé de deux paraboles dont l'une est égale à la proposée, quand on déplace celle-ci parallèlement à elle-même de la longueur $4p$ dans la direction positive de son axe.

(De Longchamps, J. S., 37.)

(*Callé*, **83**, 255.)

Enveloppes relatives à des coniques en général.

1059. Un triangle rectangle ayant pour hypoténuse la corde d'une conique et pour sommet un point fixe, dans le plan de la conique, l'enveloppe de l'hypoténuse est une seconde conique, dont un des foyers est au point fixe. (N. A., 73.)

(*Mathieu*, **44**, 121.)

***1060.** Deux côtés d'un angle droit touchent deux coniques confocales, situées dans le même plan; le lieu du sommet est un cercle; la droite qui réunit les deux points de contact a pour enveloppe une conique. (Chasles, N. A., 187.)

1061. Un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique, trouver les lieux géométriques des trois points suivants : le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le point de rencontre des trois hauteurs, et déterminer le *degré* de l'enveloppe de la droite qui renferme ces trois points. (N. A., 372.)

(*Boyer*, **57**, 371.)

1062. Dans tout triangle inscrit dans une conique, et dont deux des côtés sont tangents à une seconde conique, le troisième côté enveloppe une conique passant par les points d'intersection des deux premières. (Delevaque, N. A., 664.)

(*Josselin*, **64**, 175.)

1063. Lorsque le sommet d'un angle, dont les côtés restent parallèles à eux-mêmes, décrit une conique, la corde sous-tendue par l'angle enveloppe une seconde conique asymptotique ou semblable à la première.

Cette proposition permet de résoudre aisément le problème de l'*inscription, dans une conique donnée, d'un triangle dont les côtés soient parallèles à des directions données.*

(Pigeon, N. A., **687**.)

(**64**, 328.)

***1064.** Par deux points fixes, on mène un cercle variable; soient a et b deux des points où ce cercle coupe une conique fixe; le cercle variant, la droite ab enveloppe une courbe : construire géométriquement le point de contact de ab avec son enveloppe. (Laguerre, N. A., **1004**.)

1065. Enveloppe de la polaire d'un point donné, par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère donné.

(Gambey, N. A., **1199**.)

(*Jacob,* **76**, 547.)

1066. On donne une conique C_2, et trois points A, B, C. Par chaque point de C_2 passe une conique circonscrite au triangle ABC et tangente à C_2 en P, et chacune de ces coniques coupe la conique fixe en deux autres points M, N. L'enveloppe de la droite MN est de la quatrième classe, du sixième ordre; elle n'a pas de point d'inflexion; elle est doublement tangente aux côtés du triangle ABC; elle a quatre points doubles, six points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement passent respectivement par les six points où les côtés du triangle ABC coupent la conique C_2. (Dewulf, N. A., **1306**.)

(*Genty,* **81**, 368, 480.)

1067. Soient a, a'; b, b'; c, c' les points d'intersection d'une conique et des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC : démon-

trer que les six droites Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' enveloppent une autre conique. (SCHROETER, N. A., 1456.)

(*Droz*, **85**, 432.)

1068. Étant données une conique et une tangente à cette courbe, aux points A et B où cette tangente rencontre les axes de la conique, on élève des perpendiculaires à ces axes; puis, du point de rencontre M de ces perpendiculaires, on mène des tangentes MC et MD à la conique. Trouver, lorsque la tangente AB varie, l'enveloppe de la corde CD et le lieu du point de rencontre P des normales aux extrémités C et D de cette corde.

(CHAMBON, N. A., 1569.)

1069. Soit $B_1B_2B_3$ le triangle formé par les polaires des trois points A_1, A_2, A_3 relativement à une conique. On sait que les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 se coupent en un même point P, et que les côtés des triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ se rencontrent deux à deux sur une même droite P'; on peut donner au point P et à la droite P' les noms de *pôle* et de *polaire* du triangle $A_1A_2A_3$, par rapport à la conique. Cela posé, trouver le lieu des pôles et l'enveloppe des polaires d'un triangle fixe, par rapport :

1° Aux paraboles inscrites;

2° Aux paraboles circonscrites;

3° Aux hyperboles équilatères inscrites;

4° Aux hyperboles équilatères circonscrites;

5° Aux coniques circonscrites à un même quadrilatère;

6° Aux coniques inscrites à un même quadrilatère.

(N. C., 7.)

(*Van Aubel*, **77**, 211.)

1070. Si d'un point P, pris sur une normale fixe à une conique, on mène à cette courbe les trois autres normales :

1° Le centre du cercle circonscrit au triangle qui a pour sommets les pieds de ces trois normales se meut sur une droite fixe.

2° La droite qui joint le point P à ce centre passe par un

point fixe. Lieu de ce point, quand le pied de la normale fixe décrit la conique.

3° Les trois côtés du triangle formé par les pieds des trois normales enveloppent une parabole, tangente aux axes de la conique, et dont le foyer est la projection du centre sur la tangente au point diamétralement opposé au point P.

(Jamet, Appell, N. C., 406.)

(*De Longchamps*, **78**, 390.)

***1071.** 1° L'enveloppe de la polaire d'un point fixe P, par rapport à une série de coniques homofocales, est une parabole.

2° Déterminer le foyer et la directrice de cette parabole, et trouver le lieu du foyer, lorsque le point P décrit une courbe C dans le plan.

3° Quelle doit être la courbe C pour que le point de contact de l'axe de la parabole avec son enveloppe coïncide constamment avec le foyer? Quel est, dans ce cas, le lieu du foyer?

(Jamet, N. C., 563.)

1072. On mène une tangente en un point variable d'une conique, rapportée à son centre et à ses axes, et l'on considère les cercles tangents à la conique, à l'axe des x et à la tangente.

1° Trouver le lieu des centres de ces cercles;

2° Pour chaque position de la tangente il y a deux cercles correspondants : trouver l'enveloppe de la droite qui joint leurs centres;

3° Examiner le cas particulier où la conique se réduit à un cercle. (Fauquembergue, J. M., 344.)

***1073.** Trouver et discuter la courbe enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par quatre points fixes [1].

(Hadamard, J. S., 151.)

---

[1] Cette courbe est une courbe du quatrième degré qui a une tangente double à l'infini et trois points de rebroussement. Ces trois points sont les sommets d'un des triangles maxima inscrits dans une conique homothétique et concentrique au lieu des centres des coniques données.

Ce dernier lieu est d'ailleurs tritangent à la courbe. Les diamètres des



*1074. En un point M d'une conique on construit le cercle osculateur; soit N le point où il rencontre une seconde fois la conique. Trouver : 1° le lieu du pôle de la corde MN par rapport au cercle; 2° l'enveloppe de la tangente en N au cercle; 3° l'enveloppe du rayon du cercle qui passe par N.

(NEUBERG, J. S., 155.)

*1075. En un point M d'une conique on construit le cercle osculateur C; la seconde tangente commune à ces courbes touchant la conique en N et le cercle en P, on demande : 1° le lieu du point de rencontre des tangentes menées en M et en N; 2° le lieu du point P; 3° l'enveloppe de la corde MN; 4° l'enveloppe de la corde MP; 5° l'enveloppe du rayon CP; 6° l'enveloppe de la droite CN. (NEUBERG, J. S., 156.)

1076. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy et une droite D, on considère un angle mobile dont le sommet décrit la droite D et dont les côtés j et j' enveloppent respectivement des coniques C et C' ayant chacune le point O pour foyer et la droite D pour directrice. Démontrer que les droites qui joignent les points d'intersection des droites j et j' avec les axes Ox et Oy enveloppent des coniques bitangentes aux coniques C et C'.

(D'OCAGNE, J. S., 198.)

(*Lhébrard*, 89, 261.)

Enveloppes d'axes ou de directrices.

1077. Une ellipse de grandeur constante se déplace en restant toujours tangente à une droite fixe HAD en un point déter-

---

points de contact sont les tangentes de rebroussement et, en même temps, les diamètres de la quartique.

Si le faisceau de coniques se compose d'hyperboles équilatères, la courbe devient une hypocycloïde à trois rebroussements (d'où l'on conclut que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde est un cercle). (*Note de la Rédaction.*)



miné A. Dans chacune de ses positions, on lui circonscrit un rectangle HDCF ayant sa base sur HAD. Trouver le lieu géométrique :

1° Des foyers;

2° Du centre;

3° Des sommets C, F du rectangle circonscrit;

4° Des points de contact E, B, G de ses côtés avec l'ellipse;

5° La courbe enveloppe du grand axe.

(Brocard, N. A., 959.)

(*Willière*, **72**, 132; N. C., **76**, 377.)

1078. Une parabole se déplace en restant toujours tangente à une droite fixe en un point déterminé. On demande : 1° le lieu du foyer; 2° le lieu du point de la courbe où la tangente est perpendiculaire à la droite fixe; 3° l'enveloppe de l'axe de la parabole. (Brocard, N. A., **973**.)

(*Moret-Blanc*, **72**, 500.)

1079. Trouver l'enveloppe de l'axe d'une parabole de grandeur constante passant par un point fixe et tangente à une droite fixe. (Brocard, N. C., **170**, M., **244**.)

(*Neuberg*, N. C., **76**, 392; *Déprez*, M., **86**, 86.)

1080. Trouver l'enveloppe des axes des coniques tangentes à deux droites données, en deux points donnés.

(N. C., **374**; M., **313**.)

(*Jamet*, N. C., **78**, 299; *Pisani*, M., **84**, 230.)

1081. Trouver l'enveloppe de l'axe d'une parabole, de grandeur constante, qui reste tangente à une parabole donnée, tandis que son foyer se déplace sur l'axe de cette courbe fixe.

(Brocard, N. C., **511**; M., **206**.)

(*Neuberg*, M., **89**, 118.)

1082. Soient O, O_1 deux circonférences qui se coupent en un point A. Trouver le lieu des centres, des foyers, des sommets et

l'enveloppe des axes des coniques osculatrices au cercle O en A et tangentes au cercle O_1. (DEWULF, M., **416**.)

(*Déprez*, **91**, 144.)

1083. Une parabole de grandeur invariable touche une droite donnée OX en un point fixe O. Trouver : 1° les lieux décrits par le foyer, le sommet et la projection de O sur l'axe; 2° les enveloppes de l'axe, de la tangente au sommet et de la directrice. (M., **457**.)

(*Pisani*, **90**, 205.)

1084. Chercher le lieu des sommets et l'enveloppe des axes des paraboles tangentes à une droite donnée OX en un point variable, et passant par deux points fixes d'une droite perpendiculaire à OX. (BROCARD, M., **584**.)

(*Déprez*, **89**, 254.)

1085. On considère les paraboles qui ont même corde normale NN' (N et N' sont des points fixes.) Démontrer : 1° que l'axe enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements; 2° que la directrice enveloppe une parabole. (JERABEK, M., **603**.)

(*De Longchamps*, **88**, 164, 234.)

1086. Connaissant un foyer d'une ellipse, l'excentricité et un point, trouver l'enveloppe des directrices. (J. M., **235**.)

(*Tissier*, **80**, 566.)

1087. On considère la parabole P

$$(\lambda y - x)^2 - 2px = 0,$$

qui est tangente à l'axe Oy au point O, et qui coupe l'axe des x au point M tel que $OM = 2p$; on considère aussi la parabole cubique Q, enveloppe des normales de P. Cette courbe est tangente à l'axe Ox au point A, et coupe cet axe en un autre point B. Soit enfin C le point de rencontre de l'axe P avec Ox; on ima-

gine maintenant que, d'un point R, mobile sur Ox, on mène à la courbe P des normales. Ce problème dépend d'une équation du second degré.

1° Déterminer et discuter cette équation, et montrer quels résultats elle donne quand on suppose successivement le point R à l'un des points A, B, C ou M;

2° Après avoir déterminé, en fonction de λ, les rapports

$$\frac{OA}{OM}, \quad \frac{OB}{OM}, \quad \frac{OC}{OM},$$

déduire de ces relations que l'on a

$$2\,OA.OC = AC.OM;$$

3° Examiner successivement le cas où le point B se confond avec O, et celui où le point A coïncide avec M. Énoncer les théorèmes auxquels donnent lieu ces deux hypothèses;

4° Démontrer que le paramètre P de la parabole est donné par la formule

$$p = \frac{\lambda}{(\lambda^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

et que l'équation de l'axe est

$$\lambda y - x + \frac{p}{\lambda^2+1} = 0;$$

5° Trouver l'enveloppe de cette droite quand on suppose que p est constant, et construire la courbe. (De Longchamps, J. S., **14**.)

(*Trocmé*, **82**, 256.)

Enveloppes relatives à des courbes déterminées.

*1088. Je transcris l'équation de la courbe parallèle à l'ellipse, trouvée par M. Catalan (*Nouvelles Annales*, t. III, 1844, p. 553)

$$\begin{aligned}(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^2\\ +4a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^3-27a^4b^4k^4\\ +18a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)\\ \times(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\\ +4(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^3=0.\end{aligned}$$

Il faut démontrer que :

1° Si l'on remplace dans cette équation x, y, k respectivement par $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, on aura l'équation de la courbe de Talbot, que M. Tortolini a obtenue le premier;

2° Si l'on remplace dans la même équation x, y, k respectivement par $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $k+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, on aura l'équation de la courbe, enveloppe des droites menées par les points de la courbe parallèle à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, perpendiculairement aux rayons vecteurs issus du centre. (*Généralisation de la courbe de Talbot.*) (STREBOR, N. A., 666.)

1089. L'enveloppe des droites coupant une cycloïde sous un angle constant est une cycloïde égale. (FOURET, N. A., 799.)

(*Rouquet, Fouret,* **67**, 380; **80**, 63.)

1090. L'enveloppe des droites coupant une épicycloïde sous un angle constant est une épicycloïde semblable.

(FOURET, N. A., 800.)

(*Rouquet, Fouret,* **67**, 381; **80**, 63.)

1091. Étant donnée une spirale logarithmique, on trace la polaire du pôle de cette spirale, par rapport à un cercle osculateur à la courbe. Trouver l'enveloppe de toutes les polaires ainsi obtenues. (LAISANT, N. A., 1333; N. C., 150.)

(*Droz,* N. A., **80**, 526; *Brocard,* N. C., **76**, 392.)

1092. D'un point P pris sur une strophoïde droite, on mène deux tangentes à la courbe; soient T, T′ les points de contact. L'enveloppe de la courbe TT′ est une parabole ayant même sommet que la strophoïde, et dont le foyer est le symétrique du point double, par rapport à ce sommet commun.

(FAUQUEMBERGUE, N. A., 1555.)

1093. Étant donnée la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m=1,$$

on mène en un point M de cette courbe une tangente qui rencontre les coordonnées en A et B. On achève le rectangle ayant pour côtés OA et OB. Soit M′ le sommet opposé de O. On propose de trouver le lieu décrit par ce point M′ quand M décrit la courbe donnée.

Cela fait, on projette un point quelconque de la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^p=1$$

sur les axes en C et D. On joint le point C au point D et l'on propose de trouver immédiatement l'enveloppe des droites telles que CD. (J. M., 265.)

(*Vernay*, **81**, 89.)

1094. Trouver le lieu des points de rebroussement des courbes du troisième ordre qui ont pour asymptotes trois droites données, et l'enveloppe des tangentes de rebroussement.

(Kœhler, J. S., 57.)

(*Callé*, **84**, 163.)

Enveloppes relatives à des courbes quelconques.

1095. Une courbe quelconque A est située dans le plan d'une parabole. On lui mène une tangente mobile qui coupe la parabole en deux points. On projette les centres de courbure en ces points respectivement sur les rayons focaux qui y aboutissent.

La droite qui joint ces projections enveloppe une courbe symétrique de A par rapport au foyer.

Examiner le cas particulier où la courbe A se réduit à un point et celui où elle s'éloigne à l'infini. (Pigeon, N. A., 685.)

(*Dyrion*, **64**, 327.)

1096. La droite qui se meut de manière à rencontrer à chaque instant deux courbes quelconques sous deux angles respectivement égaux touche continuellement son enveloppe au point où

elle est coupée par la droite qui joint les deux centres de courbure. (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **1189**.)

(*Moret-Blanc*, **76**, 231.)

***1097.** On donne un faisceau F_n de courbes de l'ordre n et une droite d; chaque point D de d détermine une courbe de F_n. Démontrer que l'enveloppe de la tangente en D, à la courbe déterminée par ce point, est de la classe $2n-1$, de l'ordre $4(n-1)$; que la droite d est une tangente multiple de l'ordre $2(n-1)$; que la courbe a $4(n-2)(n-3)$ points doubles, $3(2n-3)$ points de rebroussement; qu'elle n'a aucun point d'inflexion; que les tangentes en $(n-1)$ points de rebroussement passent par les $(n-1)$ points qui correspondent à l'infini dans l'involution que les courbes du faisceau F_n marquent sur la droite d. Examiner le cas où m points de la base de F_n se trouvent sur la droite d.

Construire la courbe dans le cas où $n=2$, en supposant : 1° que les quatre points de la base du faisceau des coniques se trouvent d'un même côté de la droite d; 2° que trois de ces points se trouvent d'un côté de d, et le quatrième de l'autre côté.

(DEWULF, N. A., **1305**.)

1098. Étudier les courbes enveloppées par les droites

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda + P_n = 0.$$

P_n est un polynôme de degré n en λ, et λ un paramètre variable. Montrer que l'on peut disposer des constantes du polynôme P_n de manière que, pour n pair, les courbes n'aient aucun point de rebroussement et que, pour n impair, elles en aient un. Que peut-on dire des points de rebroussement lorsque les constantes demeurent quelconques? (L. LÉVY, N. A., **1609**.)

1099. Soit C une courbe quelconque. On fait tourner d'un même angle, et dans le même sens, toutes les tangentes à C autour des points où elles rencontrent une droite fixe. On cherche l'enveloppe C′ de ces tangentes dans leurs nouvelles

positions. Établir les relations générales existant entre C et C′, et les appliquer à quelques cas particuliers. Montrer, en outre, les analogies de C′ avec la conchoïde de C, par rapport à un point fixe. (Cesaro, M., **296**.)

(*Neuberg*, **90**, 142.)

1100. Trouver l'enveloppe de la ligne

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \sqrt[n]{(a \cos n\varphi)}.$$ (Edmunds, J. M., **317**.)

1101. On donne une courbe U et deux droites Ox, Oy; par un point M mobile sur U on trace la tangente qui coupe : Ox en A; Oy en B. Les parallèles menées par A, B aux droites Oy, Ox se rencontrent en I; ce point I décrit une courbe V.

Démontrer que la tangente à V, en I, est conjuguée harmonique de IM, par rapport aux droites IA, IB.

Si V est une droite, AB enveloppe une parabole P; déterminer, par application de la propriété signalée, le point de contact de AB avec P.

Si V est une ellipse (ou une hyperbole) ayant pour diamètres conjugués Ox, Oy, V est une quartique unicursale correspondant à l'équation

$$\mathrm{AB}\,x^2y^2 = \mathrm{A}\,x^2 + \mathrm{B}\,y^2.$$

Dans le cas de l'ellipse, on a $\mathrm{AB} > 0$; la quartique est la *Kreuzcurve*. Déduire de là le tracé de cette courbe par points et par tangentes.

Dans le cas de l'hyperbole, on a $\mathrm{AB} < 0$; la quartique correspondante est remarquable; on la rencontre dans plusieurs questions. (De Longchamps, J. S., **253**.)

(**90**, 286.)

1102. On considère une courbe U et deux droites fixes Ox, Oy. Ayant pris sur U un point mobile M, on mène, par ce point, des parallèles aux droites Ox, Oy; on obtient ainsi, sur ces droites, deux points P, Q.



La droite PQ enveloppe une courbe V et touche celle-ci en un certain point M'.

On demande quelle doit être la courbe U pour que MM' passe constamment par le point O. (DE LONGCHAMPS, J. S., 310.)

(Mme *Prime*, **92**, 72.)

1103. On donne une courbe plane fixe U, un point O et une droite Oz dans son plan.

Soient P, Q deux points mobiles sur U et tels que Oz soit bissectrice de l'angle POQ; les tangentes aux points P, Q se coupent en S; OS rencontre PQ en V.

Démontrer que PQ touche son enveloppe en un point R tel que

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OQ}^2}\,\frac{QV}{PV}.$$

Application. — On considère une ellipse de centre O; soient OP, OQ deux isogonales par rapport aux axes de la courbe.

1° Trouver l'enveloppe de PQ.

2° Soit Δ la circonférence circonscrite au triangle POQ. La tangente à Δ, en O, coupe PQ en un point dont on demande le lieu géométrique.

On trouve, dans les deux cas, pour représenter le lieu cherché, l'équation

$$c^2(y^2 - x^2) = a^2 b^2.$$

Expliquer cette coïncidence en appliquant le théorème en question. (DE LONGCHAMPS, J. S., 315.)

1104. Trouver l'enveloppe de la droite

$$3(y - tx)(3t^2 - 1) + t^3 = 0,$$

dans laquelle t désigne un paramètre variable. Construire cette courbe. Quelles sont les régions du plan par lesquelles passent trois droites réelles de ce système, en chaque point?

(HUMBERT, J. S., 330.)

AUTRES ENVELOPPES.

—

Enveloppes de cercles, relatives à des figures circulaires.

1105. Le triangle ABC a un sommet fixe A, un angle constant A; les sommets B et C sont sur une droite fixe. Quelle est l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle? (N. A., **273**.)

(*Pépin, Gilbert, Bellavitis*, **53**, 441; **54**, 33; **60**, 115.)

1106. Sur une droite AB de *longueur donnée,* on décrit un segment capable d'un *angle donné*. L'extrémité A se meut sur une droite fixe M et l'extrémité B sur une droite fixe N situées l'une et l'autre dans le plan du segment. On demande de trouver : 1° le lieu d'un point *quelconque* du plan du segment, point fixe *relativement* au segment; 2° le lieu d'un point de la circonférence du segment; 3° l'enveloppe du cercle; 4° les mêmes lieux et la même enveloppe lorsque l'*angle donné* est égal à l'angle des deux droites M et N. (De la Gournerie, N. A., **366**.)

(*Mannheim*, **57**, 187.)

1107. L'enveloppe des circonférences ayant leurs centres sur une circonférence C, et tangentes à un diamètre AB de C, est l'épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence moitié moindre que C, roulant sur C.

Si l'on remplace le diamètre AB par une droite quelconque, l'enveloppe est-elle encore une épicycloïde?

(Catalan, N. A., **667**.)

(*De Marsilly*, **64**, 260, 263.)

***1108.** Soient (C) un cercle de centre O, OX un diamètre quelconque. On prend sur OX une longueur OM sur laquelle, comme diamètre, on décrit un autre cercle (D).

D'un point quelconque A de (C) on mène la droite AO qui

rencontre le cercle (D) en un point B. Avec AB comme rayon on décrit un cercle, dont le centre est en A; on effectue la même construction en chacun des points de (C).

Les cercles ainsi obtenus ont une enveloppe. Déterminer les sommets de cette courbe.

Trouver la nature du lieu de ces sommets, lorsque M se déplace sur le diamètre OX. (Ribaucour, N. A., **861**.)

1109. Lorsqu'un cercle passant par un point fixe F est vu sous un angle constant d'un autre point F', ce cercle enveloppe un limaçon de Pascal qui a pour foyer double le point F et pour foyer simple le point F'. (Faure, N. A., **1127**.)

(*Givelet,* **74**, 301 ; **75**, 179.)

1110. On donne dans un même plan deux droites parallèles A, B et un point C situé hors de l'espace limité par les deux parallèles; par le point C on mène une sécante rencontrant les droites données en a et b, et sur ab comme diamètre on décrit un cercle : démontrer que, si la sécante devient mobile, l'enveloppe du cercle est une hyperbole.

Corollaire. — Si, par le foyer F d'une hyperbole, on mène une droite coupant les tangentes aux sommets en des points t, t_1, le cercle décrit sur tt_1 comme diamètre est tangent aux deux branches de l'hyperbole. (Harkema, N. A., **1197**.)

(*Biard,* **76**, 282.)

***1111.** On donne deux droites fixes passant au point O, et une droite AB de longueur constante glisse sur ces deux droites. Démontrer que le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle AOB est une ellipse; le cercle des neuf points a pour enveloppe une courbe parallèle à l'ellipse.

Trouver le théorème réciproque. (Weill, N. A., **1498**.)

1112. Un triangle ABC, dont le sommet A est fixe, tourne autour de ce sommet en variant de grandeur, mais en restant

semblable à lui-même; si le côté BC passe par un point fixe, l'enveloppe de la circonférence circonscrite au triangle est un limaçon de Pascal. (NEUBERG, N. C., **113**.)

(*Neuberg*, **76**, 358; **80**, 213, 219.)

1113. Trouver l'enveloppe de la circonférence circonscrite à un triangle variable, qui reste semblable à lui-même, et dont les côtés passent par trois points fixes. (NEUBERG, N. C., **127**.)

(*Neuberg*, **80**, 65, 213, 219.)

1114. Soient O, O′ les centres de deux circonférences données se coupant en A et A′. On mène par A deux sécantes PP′, QQ′, puis on tire les cordes PQ et P′Q′ qui se coupent en M. 1° Lorsque PP′ est fixe et QQ′ mobile autour de A, le point M décrit une circonférence O″ qui passe par A′; 2° la droite PP′ tournant autour de A, le centre de la circonférence O″ décrit la circonférence OO′A′; 3° la circonférence O″ enveloppe un limaçon de Pascal; 4° étant donnés les circonférences O, O′ et le point M, construire les sécantes PP′, QQ′ telles que les cordes PQ, P′Q′ passent par M. (BARBARIN, M., **236**.)

(*Bastin*, **84**, 117.)

1115. Deux cercles de rayons R, *r* ont leurs centres O, *o* sur une droite donnée; ils sont tels qu'il y a une infinité de triangles inscrits dans le cercle O et ayant leurs côtés tangents au cercle *o*. Cela posé :

1° Trouver l'enveloppe du cercle de rayon *r*, si le cercle de rayon R est fixe;

2° Trouver l'enveloppe du cercle de rayon R, si le cercle de rayon *r* est fixe;

3° Trouver le lieu du point de Lemoine des triangles inscrits au cercle de rayon R et dont les côtés touchent le cercle de rayon *r*, lorsque les deux cercles sont fixes.

(LEMOINE, M., **707**.)

(*Déprez*, **91**, 233.)

Enveloppes de cercles; autres générations.

1116. Les cercles circonscrits aux différents triangles semi-réguliers ([1]) inscrits dans une ellipse ont pour centre radical commun le centre de cette ellipse.

Le lieu de leurs centres est une ellipse. Leur enveloppe est une anallagmatique du quatrième ordre. (Fouret, N. A., **767**.)

(*Pellet*, **67**, 466; **75**, 68.)

1117. Étant donnés une conique et un point dans son plan, de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle circonscrit à cette conique et tel, que les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent au point donné; le cercle passant par les pieds de ces trois perpendiculaires et les cercles analogues ont le même centre radical.

Le lieu de leurs centres est une conique. Leur enveloppe est une anallagmatique du quatrième ordre. (Fouret, N. A., **768**.)

(*Pellet*, **75**, 68.)

***1118.** Si, par le pôle de l'orthogénide

$$\rho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin\left(-\frac{1}{3}\omega\right),$$

on mène une droite quelconque, les tangentes aux points d'intersection de cette droite avec l'orthogénide forment un triangle équilatéral ([2]). Trouver le lieu du centre de ce triangle et l'enveloppe du cercle circonscrit, lorsque la droite oscille autour du pôle. (E. Lucas, N. A., **1266**.)

***1119.** Soient A et B les deux extrémités de deux rayons con-

---

([1]) Un polygone semi-régulier est la projection d'un polygone régulier; dénomination due à M. Transon. (N. A., **63**, 317.)

(*Note de M. Fouret.*)

([2]) *Voir* N. A., **66**, 30; **76**, 101.

jugués variables d'une ellipse; trouver l'enveloppe des cercles décrits sur AB comme diamètre. (BARBARIN, N. A., 1287.)

1120. Par le foyer d'une parabole on mène trois rayons vecteurs faisant entre eux des angles égaux, et en leur milieu on élève des perpendiculaires qui, en se rencontrant, forment un triangle équilatéral.

Démontrer que le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle est une parabole, et que l'enveloppe de ce cercle se compose d'une droite et d'un cercle.

(FAUQUEMBERGUE, N. A., 1546; M., 491.)

(*Mosnat,* M., 88, 97.)

1121. L'enveloppe des circonférences qui ont pour diamètres les rayons de courbure d'une épicycloïde est une courbe inverse de cette épicycloïde. (MENNESSON, N. C., 410; M., 461.)

(*Cesaro,* M., 87, 15.)

1122. Trouver l'enveloppe des circonférences décrites sur les cordes focales d'une conique comme diamètres. (GOB, M., 569.)

(*Mandart,* 89, 165.)

1123. On donne une parabole P, rapportée à ses axes ordinaires; par le pied de la directrice on mène une transversale qui rencontre P en deux points A, B; soit C le cercle qui passe par ces points et par le foyer de P.

Lieu des centres des cercles C. Ce lieu est une parabole cubique.

Enveloppe des polaires de l'origine. Cette courbe est une cubique unicursale.

Enveloppe des cercles C; on trouvera une quartique à point triple.

Par le pied de la directrice on mène deux droites rectangulaires Δ' et Δ''; soient C' et C'' les cercles correspondants; trouver

le lieu des points communs à C' et C''; ce lieu est une quartique passant doublement par les ombilics du plan.

(De Longchamps, J. S., 72.)

(*J. Lemoine*, **84**, 272.)

1124. On donne une ellipse ayant pour foyers F et F′ et un point $P(\alpha, \beta)$. Par le point P, on mène les tangentes PM et PM′ à la courbe, puis on mène les normales en M et M′. Ces normales coupent PF et PF′ aux points A, B, C, D. Le quadrilatère ainsi obtenu est inscriptible. 1° Trouver l'équation du cercle circonscrit (C). 2° A chaque point P correspond un cercle (C); on mène à l'un de ces cercles les tangentes Fm et Fm'. Calculer le rapport $\frac{Fm}{Fm'}$. 3° Que devient le cercle (C) quand le point P décrit le cercle circonscrit à l'ellipse? quand il décrit le cercle de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, a et b étant les demi-axes de la courbe? 4° Trouver le lieu géométrique du point P pour lequel le cercle (C) passe par un point donné; cas où le point est l'un des foyers. 5° Trouver l'enveloppe des cercles (C) quand le point P décrit l'une des tangentes aux extrémités du grand axe. (Antomari, J. S., 84.)

(*Bourgarel*, **89**, 228.)

1125. On considère une ellipse Γ rapportée à ses axes.

Désignons par P et Q les extrémités du grand axe, et imaginons, sur Γ, un point mobile M. Les droites PM et QM rencontrent le cercle Δ, décrit sur PQ comme diamètre, en des points A et B :

1° Trouver le lieu décrit par le pôle C de la droite AB, par rapport à Δ. Ce lieu est l'ellipse qui correspond à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)} = 1.$$

2° Démontrer qu'en désignant par φ l'angle d'anomalie du point M, l'équation du cercle AMB est

$$x^2 + y^2 - 2ax\cos\varphi - \frac{a^2+b^2}{b}y\sin\varphi + a^2 = 0.$$

3° Lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine aux cercles AMB. Ce lieu est le cercle Δ lui-même.

4° Enveloppe des cercles AMB. On trouve deux cercles correspondant aux équations

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2 y}{b} - a^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - \frac{c^2 y}{b} - a^2 = 0.$$

5° Lieu des centres de similitude du cercle principal Δ et du cercle mobile AMB. (DE LONGCHAMPS, J. S., **122**.)

(*Rat,* **87**, 184.)

1126. On considère une parabole P dont le sommet est S. Soit AA′ une corde principale de P. Il existe une circonférence Δ tangente, aux points A, A′, aux droites SA, SA′; elle coupe P en deux points B, B′, différents des points A, A′.

1° Démontrer que la distance des droites AA′, BB′ est égale au paramètre $2p$.

2° Ayant tracé une droite parallèle à l'axe et touchant Δ en I, on demande le lieu de ce point, quand AA′ est mobile. Ce lieu est la parabole P.

3° Trouver l'enveloppe des circonférences telles que Δ.

(DE LONGCHAMPS, J. S., **328**.)

Enveloppes de coniques ou d'autres courbes.

1127. Trouver le lieu des intersections successives de toutes les ellipses ayant un diamètre donné de grandeur et de position, et son conjugué, donné de grandeur seulement. (N. A., **45**.)

(*Marqfoy,* **50**, 432.)

1128. $\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$, étant l'équation d'une ellipse (axes rectangulaires), $\left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = 1$ est l'équation de la polaire réciproque de l'enveloppe de l'ellipse, relativement au cercle

$$y^2 + x^2 = c^2 = a^2 - b^2.$$ (TERQUEM, N. A., **165**.)

(*Faure,* **52**, 191.)

1129. La courbe enveloppe de toutes les hyperboles équilatères concentriques, et qui sont coupées orthogonalement par une même droite, a pour équation

$$x^2 - y^2 - a^2 = 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},$$

axes rectangulaires. (STREBOR, N. A., **198**.)

(*Jubé, Vachette*, **49**, 376; **51**, 314.)

1130. Les différents points d'une courbe mobile engendrent une série de courbes dont l'enveloppe est la même que l'enveloppe de la courbe mobile.

Exemple : l'enveloppe d'une droite de longueur constante, qui se meut entre deux droites rectangulaires, est la même que celle des ellipses engendrées par chacun des points de la droite mobile.

Le théorème général ne suppose pas que la courbe mobile ne se déforme pas pendant le mouvement. (BARBIER, N. A., **866**.)

(*Laisant*, **68**, 545.)

1131. Trouver l'enveloppe des ellipses concentriques à aire constante dont les axes ont la même direction.

(HARKEMA, N. A., **916**.)

(*Mlle Ermanska*, **69**, 321, 541.)

1132. Montrer que la développée de l'ellipse peut être considérée comme l'enveloppe d'ellipses concentriques et co-axiales à la proposée. (DE POLIGNAC, N. A., **1112**.)

(*Moret-Blanc*, **73**, 278.)

1133. Trouver l'enveloppe d'une parabole dont le foyer et un point de la directrice sont fixes. (D'OCAGNE, N. A., **1512**.)

(*Richard*, **85**, 384.)

1134. Quelle est l'enveloppe d'une série de coniques ayant un

foyer commun, un point commun, et un axe focal de grandeur constante? (PH. BRETON, N. C., **516**.)

(*Jamet*, **80**, 133.)

1135. Étant donnée une parabole P, on considère toutes les paraboles P′ qui ont même foyer que P et pour directrice une tangente qnelconque menée à P. Trouver l'enveloppe des paraboles P′. (NEUBERG, M., **764**.)

(*Jamet*, **92**, 172.)

1136. On considère les paraboles P qui sont tangentes à l'origine à l'axe Ox, et dont les directrices enveloppent la parabole fixe qui correspond à l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

(axes rectangulaires).

Démontrer :

1° Que l'équation générale des paraboles P est

$$(y - \lambda x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0,$$

λ désignant un paramètre variable;

2° Que l'enveloppe de ces paraboles a pour équation

$$2x^3 = 27py^2;$$

3° Que le lieu des foyers est une cissoïde;

4° On propose enfin de trouver l'enveloppe des axes des paraboles P.

Ce lieu est l'hypocycloïde à trois rebroussements.

(DE LONGCHAMPS, J. S., **132**.)

(*Sirven*, **87**, 213.)

1137. Enveloppe des coniques qui ont un diamètre $AA' = 2a$ donné en grandeur et en position, et le conjugué donné en grandeur seulement. (LEMOINE, J. S., **136**.)

(*Hugon*, **86**, 116.)

1138. On considère un angle droit yOx, sur Ox un point

fixe $A(OA = a)$; sur Oy un autre point fixe $B(OB = b)$; on suppose $a > b$, et l'on pose $a^2 - b^2 = c^2$. Par les points A et B on fait passer un système de deux droites rectangulaires ωA, ωB, et l'on construit une hyperbole équilatère passant par l'origine O, et admettant ces droites pour axes de symétrie. On demande alors : 1° de démontrer que par un point du plan passent deux de ces hyperboles; 2° de trouver l'enveloppe de ces coniques; cette courbe est du quatrième degré et possède un point de rebroussement à l'origine; 3° trouver le lieu des sommets, le lieu des foyers, le lieu des points communs à la directrice et à l'axe; 4° le lieu de projection de l'origine sur les asymptotes. On démontrera que ces différents lieux sont constitués par un système de deux cercles.

(De Longchamps, J. S., **144**.)

(*Fesquet*, **88**, 19.)

1139. On considère une ellipse Γ; soient F l'un de ses foyers, Δ la directrice correspondante, C le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur Δ; par un point I on mène à Γ deux tangentes qui rencontrent Δ aux points A et B.

1° Trouver le lieu du point I sachant que C est le milieu de AB :

Ce lieu est la perpendiculaire élevée à FC, au point F;

2° Trouver le lieu du point I sachant que AFB est un angle droit :

Ce lieu est une conique φ, ayant pour foyer F, pour directrice Δ, et dont l'excentricité est égale à $e\sqrt{2}$, e désignant celle de Γ;

3° Trouver l'enveloppe de φ, quand on suppose que les ellipses Γ sont variables, mais restent homofocales :

Cette enveloppe est un cercle;

4° Trouver l'enveloppe des coniques φ, quand on suppose que les ellipses Γ varient, mais en conservant sur FC les mêmes sommets;

Ce lieu est une quartique unicursale; on indiquera les trois points doubles de cette courbe. (De Longchamps, J. S., **194**.)

(*Berthon*, **90**, 230.)

1140. On considère un triangle ABC et par les deux sommets B, C on fait passer des coniques Γ qui coupent de nouveau les côtés AB et AC respectivement en B′ et en C′, de telle sorte que les tangentes en ces points soient parallèles aux côtés AC et AB : trouver l'enveloppe des coniques Γ.

Cette enveloppe est une quartique située tout entière à l'intérieur du triangle ABC et présentant, aux sommets de ce triangle, trois points de rebroussement. On vérifiera que les tangentes en ces points sont les médianes du triangle et que le lieu demandé ne varie pas quand, au lieu des points B et C, on fait passer les coniques considérées par deux sommets quelconques du triangle ABC. (De Longchamps, J. S., **204**.)

(*Delbourg,* **90**, 175.)

1141. On considère un triangle AOB rectangle en O; par les points A et B on mène deux droites rectangulaires mobiles qui se coupent en S et l'on imagine une parabole P, de sommet S, ayant pour axe SA et passant par O.

1° La tangente en O, à P, rencontre AS en un point I; démontrer que le lieu décrit par I est une circonférence.

2° L'enveloppe des paraboles P est une cissoïde oblique.

(De Longchamps, J. S., **222**.)

(*Delbourg,* **90**, 21.)

SEPTIÈME PARTIE.

FIGURES MOBILES. — TRAJECTOIRES.

FIGURES MOBILES.

Figures mobiles diverses.

1142. Si une figure qui reste toujours semblable à une figure donnée se meut de manière que trois points décrivent des lignes droites, tout autre point de la figure décrira aussi une ligne droite. (PETERSEN, N. A., **782.**)

(*Durand,* **67**, 83.)

1143. Lorsqu'une figure, qui reste toujours semblable à une figure donnée, se meut de manière que trois de ses lignes passent par des points fixes, toute autre ligne de la figure passera aussi par un point fixe. (PETERSEN, N. A., **783.**)

(*Durand,* **67**, 80.)

***1144.** On donne à un plan P un mouvement infiniment petit sur lui-même; son centre instantané de rotation O et son cercle des centres C sont déterminés.

Désignons par t la tangente en O à C.

Considérons une figure F dans P; le lieu géométrique φ des centres de courbure des trajectoires des points de F, ainsi que les figures F′ et φ', symétriques, respectivement, par rapport à t, des figures F et φ.

La figure F′ est le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points de la figure φ'.

(DEWULF, N. A., **1372**.)

***1145.** Deux circonférences C, C′, ayant respectivement pour rayons R, r sont données; leurs centres O, O′ sont placés sur un même axe XX′ et distants d'une quantité constante a.

Une droite AB, de longueur constante, est assujettie au mouvement suivant : le point A décrit la circonférence intérieure avec une vitesse angulaire constante; le point B décrit la circonférence extérieure avec une vitesse dépendant des conditions du mouvement.

On demande :

1° L'expression la plus simple de l'aire S engendrée par la droite AB quand le point A décrit un arc correspondant à un angle intérieur quelconque α. — 2° Quelle doit être la position initiale du point A sur sa trajectoire, c'est-à-dire, la position initiale de la droite AB, pour que la surface S soit maximum? — 3° Plus simplement, quelle doit être la position initiale du point A, pour que, décrivant un arc AA′ correspondant à un angle α, l'arc extérieur AB′, correspondant à un angle β décrit par l'extrémité B de AB, soit maximum? (N. C., **565**) [1].

1146. Une droite mobile ab enveloppe une courbe E; la longueur de cette droite est définie par deux courbes sur lesquelles doivent se trouver ses extrémités a et b. Ainsi le point a reste sur la courbe (a), le point b sur la courbe (b). Un point m de cette droite partage le segment variable ab en deux segments proportionnels à deux segments donnés.

Les normales aux trajectoires (m) des différents points de ab enveloppent une parabole (P) inscrite dans le quadrilatère formé par la droite ab, les normales en a à (a), en b à (b) et la normale à E au point où cette courbe est touchée par ab.

---

[1] L'énoncé en question a été contesté par M. Cesaro (**80**, 415), mais sans aucune discussion. D'une Note de M. Catalan, il résulte que cette question vient de l'École des Mines de Liège. Quoi qu'il en soit, elle paraît être digne d'un examen plus attentif.

Les tangentes aux mêmes trajectoires enveloppent une parabole (P′). Les paraboles (P) et (P′) ont le même foyer, leurs axes sont rectangulaires, etc. (DEWULF, M., **29**.)

(*Neuberg*, **81**, 106.)

1147. Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites qui se coupent, un point de la droite décrit une ellipse. Démontrer que l'aire de l'ellipse est indépendante de l'angle des deux droites.

(STEINER, M., **62**, J. M., **382**.)

(*Jamet*, M., **81**, 179; **82**, 37; *Tranié*, J. S., **82**, 115.)

1148. Un plan P′ se déplace sur un plan fixe P, de manière qu'un point déterminé A de P′ parcourt une droite D donnée dans le plan P, et qu'une droite déterminée B menée par A dans le plan P′ s'appuie sur un point C donné dans le plan P. Trouver : 1° les lieux décrits par le centre instantané de rotation sur les deux plans; 2° les trajectoires des points et les enveloppes des droites du plan mobile. (NEUBERG, M., **391**.)

(*Meurice*, **90**, 203.)

1149. Soient a_1, a_2, ... a_i, ... des droites passant par un point fixe A, et supposons ce faisceau de droites lié à un plan qui se déplace sur lui-même. Soient O le centre instantané de rotation, (C) le cercle des centres. A la droite a_i correspond une conique (a_i). Soit M le point d'intersection de (a_i) avec une droite passant par le centre instantané O et faisant avec a_i un angle constant φ. Démontrer que le lieu géométrique du point M est une strophoïde qui a son point double en O, et dont les cercles osculateurs en O sont : 1° la circonférence des centres (C); le segment capable de l'angle φ décrit sur OA.

(DEWULF, M. **418**.)

(*Servais*, **91**, 93.)

1150. Deux sommets A, B d'un triangle sont fixes, et le troisième C décrit une courbe donnée (C). Trouver, par la mé-

thode de Roberval, les tangentes aux lieux décrits par le point de concours des hauteurs, le centre du cercle inscrit, et le centre du cercle des neuf points. (NEUBERG, M., 440.)

(*Meurice*, **88**, 117.)

1151. Des droites de longueurs constantes se meuvent, dans un plan, en s'appuyant par leurs extrémités à une droite D et à une ligne quelconque C. On considère, à un moment donné, les droites qui passent par un même point de C et l'on mène à leurs enveloppes les normales qui correspondent à ces positions.

Démontrer que ces normales sont tangentes à une même parabole. (CESARO, M., 510.)

(*Verniory, Cesaro*, **86**, 214; **89**, 83.)

1152. Une droite *ao* se confondant d'abord avec le rayon AO, glisse par une de ses extrémités (*a*) sur ce rayon; elle est animée, en même temps, d'un mouvement de O à B, sur le rayon perpendiculaire à AO, de telle sorte que les parties extérieures mo', no'', po''', ... [1] soient toujours égales au chemin parcouru sur ce rayon. Donner l'équation de la courbe, ou de l'arc de la courbe décrite par l'extrémité (*o*) de la droite mobile.

(FORTIN, J. S., 219.)

(*Delbourg*, **90**, 236.)

***1153.** Une droite se déplace sur un plan, de façon que chacun de ses points décrive une ellipse; quelles sont les propriétés communes à toutes ces ellipses? (MANNHEIM, J. S., 250.)

Roulettes à base rectiligne.

1154. Lorsqu'une chaînette roule sur une droite, une droite quelconque de son plan enveloppe une développante de parabole. (RIBAUCOUR, N. A., 862.)

(*Giard*, **71**, 327.)

---

[1] *m, n, p*, ... sont les intersections successives de la droite mobile avec le rayon OB perpendiculaire à OA.

1155. Lorsqu'une ellipse en roulant sans glisser sur une droite a fait un tour entier, l'arc décrit par le foyer est égal à la circonférence ayant pour diamètre le grand axe. (N. A., **901**.)

(*Morel,* **69**, 314, 420; N. C., **76**, 379.)

1156. L'aire de la courbe lieu du centre d'une ellipse qui roule sans glisser sur une droite fixe est la moyenne arithmétique entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres. (Brocard, N. A., **1006**.)

(*Bourguet,* **73**, 451; **74**, 538; **75**, 231.)

1157. Trouver l'enveloppe de la base d'une cycloïde qui roule sur une droite. (Todhunter, N. C., **303**.)

(*Mennesson,* **78**, 362.)

1158. Une ellipse roule, sans glisser, sur une horizontale fixe. Trouver le lieu de son point le plus haut. (Brocard, N. C., **377**.)

(*Fauquembergue,* **80**, 325.)

1159. Une parabole roule, sans glisser, sur une droite fixe. Trouver le lieu du point de contact de la tangente perpendiculaire à la droite fixe donnée. (Brocard, N. C., **378**.)

(*Fauquembergue,* **80**, 327, 331.)

1160. Une ellipse roule, sans glisser, sur une droite fixe. Trouver le lieu de ses points où la tangente est perpendiculaire à la droite fixe donnée. (Brocard, N. C., **379**.)

(*Fauquembergue,* **80**, 329.)

1161. Construire la courbe qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$(4a-y)^3 = 27a(x^2+y^2).$$

Si l'on fait rouler cette courbe sur un axe fixe $y = a$, l'origine des coordonnées, étant supposée liée à cette courbe, viendra

en un point M : on demande d'exprimer sa distance P à l'axe fixe, ainsi que sa distance R au point de contact, au moyen de l'angle dont la courbe aura tourné.

Si, à partir du point fixe O, l'on porte, sur la perpendiculaire à l'axe fixe, une longueur $OA = P$, et que l'on mène par A une droite AB parallèle à R (MR), de façon que l'on ait $OA = OB$, le point B décrira une courbe dont on demande l'équation.

(N. C., **408**.)

Roulettes à base curviligne.

1162. O_1 est une circonférence décrite sur un rayon de la circonférence O comme diamètre; on fait rouler O autour de O_1. On demande : 1° le lieu décrit par un point quelconque du plan de O; 2° l'enveloppe d'une droite quelconque liée invariablement à la circonférence O. (Mannheim, N. A., **437**.)

(*Niebylowski*, **68**, 37; **69**, 168.)

1163. La développante d'un cercle est la route que suit le pôle d'une spirale logarithmique roulant sur un autre cercle.

(Haton de la Goupillière, N. A., **658**.)

(*Rouquel*, **63**, 494, 547.)

1164. La spirale tractrice est la trajectoire que suit le pôle d'une spirale hyperbolique roulant sur elle-même, en partant de la coïncidence des deux pôles.

(Haton de la Goupillière, N. A., **661**.)

(*Rouquel*, **63**, 501, 549.)

1165. Démontrer :

1° Que le mouvement de l'angle droit, donné par Newton, pour tracer la cissoïde, est produit par le roulement d'une parabole sur une autre parabole égale à la première;

2° Que les lignes décrites par les différents points du plan de la parabole mobile sont des courbes du troisième degré (sept espèces différentes d'après la classification de Newton); de là,

pour toutes ces courbes, une génération mécanique semblable à celle de la cissoïde;

3° Que les roulettes ainsi obtenues ont une génération géométrique simple (par points); faire voir en outre comment on peut passer de cette génération géométrique à la génération mécanique (mouvement continu). (HABICH, N. A., **790**.)

(*Lemaitre*, **67**, 136.)

***1166**. Une ellipse roule sur une autre ellipse. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes.

(DAUPLAY, N. A., **937**.)

1167. Une courbe plane c roule sur une courbe fixe C, située dans le même plan, en entraînant un point mobile qui décrit alors une courbe b. A un instant donné, les deux courbes se touchent en A, et le point mobile étant en M, la courbe c s'arrête brusquement et la courbe C commence au contraire à rouler sur la première en entraînant le point M suivant une courbe B. Démontrer que les centres de courbure des deux courbes b et B, au point commun M, divisent harmoniquement la longueur MA.

(LAISANT, N. A., **943**.)

(*Geoffroy*, **69**, 548.)

1168. Un cercle roule sur une ellipse. Trouver : 1° le lieu des points de contact des tangentes à ce cercle parallèles aux axes de l'ellipse; 2° le lieu des points de rencontre de ces tangentes; 3° la quadrature des courbes obtenues.

(FAUQUEMBERGUE, N. A., **1398**.)

(*Brocard*, **91**, 6*.)

1169. Soit ABmD un quadrilatère articulé, formé de quatre tiges égales deux à deux : $m\text{B} = m\text{D} = a$, $\text{AB} = \text{AD} = b$ (1). Le côté Dm étant fixe, le déplacement de la tige mobile AB revient au roulement d'un ovale de Descartes dans un ovale de Descartes. (MANNHEIM, N. C., **229**.)

(*Mennesson, Laquière*, **78**, 213; **80**, 124, 496, 543.)

(1) Système de M. Roberts.

1170. Soit ABmD un quadrilatère articulé, formé de quatre tiges égales deux à deux : $mB = mD = a$, $AB = AD = b$ [1]. Le côté mD étant fixe, chaque point de la tige AB et du plan emporté par cette tige décrit une inverse de conique.

(Roberts, N. C., **230**) [2].

(*Mennesson, Laquière,* **78**, 215; **80**, 125, 372.)

1171. Soit ADBC un quadrilatère articulé, formé de quatre tiges égales deux à deux : $AD = BC = a$, $AC = BD = b$ [3]. Si l'on fixe la tige AC, chaque point de la tige BD et du plan emporté par cette tige décrit une inverse de conique.

(Hart, N. C., **231**.)

(*Mennesson, Laquière,* **78**, 218; **80**, 128, 378.)

1172. Soit ADBC un quadrilatère articulé, formé de quatre tiges égales deux à deux : $AD = BC = a$, $AC = BD = b$ [4]. Si l'on fixe la tige AC, le déplacement de la tige BD revient au roulement d'une ellipse sur une ellipse égale, ou d'une hyperbole sur une hyperbole égale. (Clifford, N. C., **232**.)

(*Mennesson,* **78**, 219.)

***1173.** Une cycloïde glisse entre deux droites concourant en O, auxquelles elle reste constamment tangente. Soient M et M′ les points de contact; le centre de la circonférence passant par O, M, M′ décrit une ellipse [5]. (Mennesson, N. C., **427**.)

***1174.** Le mouvement d'une cycloïde, glissant entre deux droites concourantes, revient au roulement, sur une ellipse, d'une cycloïde allongée. (Mennesson, N. C., **429**.)

---

(1) Système de M. Roberts.

(2) Cette question, ainsi que la suivante, est placée dans cette division à cause de son évidente connexité avec celle qui précède.

(3) Inverseur Hart.

(4) Inverseur Hart.

(5) *Voir* la question suivante.

*1175. Si l'on place, au sommet d'une parabole, le pôle d'une spirale d'Archimède, dont le paramètre soit moitié de celui de la parabole, et qu'on fasse rouler intérieurement la spirale sur la parabole, son pôle décrira une ligne droite, axe de la parabole.
(N. C., **587**.)

1176. Appelons directrice d'une chaînette l'axe des abscisses quand cette courbe a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Cela posé, démontrer que, si cette chaînette roule extérieurement sur un cercle de rayon a, le pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la directrice décrit une spirale d'Archimède. (MANSION, M., **12**.)

(*Clevers,* **81**, 23, 71; **82**, 147.)

TRAJECTOIRES ORTHOGONALES OU OBLIQUES.

1177. Déterminer *géométriquement* les trajectoires orthogonales :

1° De toutes les paraboles ayant même foyer et même axe, et dont les branches infinies sont tournées dans le même sens;

2° De toutes les paraboles ayant même sommet et même axe.
(LAISANT, N. A., **827**.)

(*Lemaître,* **68**, 132.)

1178. Trouver la trajectoire orthogonale d'un système de paraboles égales, tangentes en leur sommet à une droite fixe.
(BROCARD, N. A., **1052**.)

(*Gambey,* **73**, 185.)

***1179.** 1° Trouver l'équation des courbes qui rencontrent sous un angle constant tous les segments de circonférences décrits sur une même corde.

2° Même problème pour les hyperboles équilatères concentriques qui passent par un point fixe.

3° Même problème pour les ellipses homofocales.

4° Même problème pour les cassiniennes homofocales, c'est-à-dire les courbes telles que le produit des distances de chaque point aux n sommets d'un polygone régulier reste constant.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **1105**.)

1180. Trouver les trajectoires orthogonales d'une droite de longueur constante mobile entre deux axes rectangulaires.

(BARBARIN, N. A., **1360**.)

(*Fauquembergue,* **84**, 438.)

1181. Soient CM, CM′, CM″, ... des spirales logarithmiques, en nombre infini, menées à partir du point fixe C, et ayant toutes le même pôle.

Déterminer les trajectoires orthogonales de toutes ces spirales.

(LAISANT, N. C., **515**.)

(*Jamet,* **80**, 130, 131, 333) (¹).

1182. Trouver les trajectoires orthogonales des circonférences représentées par l'équation $x^2+y^2-2\lambda x+a^2=0$, où λ est un paramètre variable. (M., **214**.)

(*Brocard,* **83**, 70.)

1183. On considère une ellipse rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Soit M un point de l'ellipse; par le point M, le point diamétralement opposé et les extrémités A, A′ du grand axe on fait passer une hyperbole équilatère H; puis on prend un cercle C passant par les points M, A et A′. Cela posé, l'hyperbole H et le cercle C ont un quatrième point commun P; on mène MP, et l'on demande, le point M parcourant l'ellipse, de déterminer la trajec-

(¹) Généralisation.

toire orthogonale des droites MP, c'est-à-dire la courbe qui les coupe à angle droit.

C'est une ellipse; on fera voir que cette ellipse n'est jamais un cercle, et qu'elle n'est pas non plus homothétique à l'ellipse donnée. On suppose, bien entendu, $a > b$.

(De Longchamps, J. M., 369.)

(*Lelieuvre*, J. S., **82**, 139.)

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

FIGURES RECTILIGNES ET CIRCULAIRES.

Figures rectilignes.

Figures circulaires.

DEUXIÈME PARTIE.

CONIQUES.

Une ellipse. — Propriétés.

Une ellipse. — Problèmes.

Une hyperbole.

Une parabole. — Propriétés.

Une parabole. — Problèmes.

Une conique à centre unique.

Une conique en général. — Propriétés.

Une conique en général. — Problèmes.

Deux coniques.

Plus de deux coniques.

Construction ou détermination d'une conique.

TROISIÈME PARTIE.

COURBES ALGÉBRIQUES.

Discussions d'équations.

Cubiques.

Quartiques.

Courbes de degrés supérieurs à 4.

QUATRIÈME PARTIE.

COURBES TRANSCENDANTES OU QUELCONQUES. COORDONNÉES POLAIRES. — TRANSFORMATIONS.

Courbes transcendantes.

Courbes quelconques.

Détermination d'une courbe d'après des conditions données.

Courbes en coordonnées polaires.

Transformations.

CINQUIÈME PARTIE.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

Lieux relatifs à des figures rectilignes.

Lieux relatifs à des figures circulaires.

Lieux relatifs à une conique déterminée.

Lieux relatifs à une conique en général.

Lieux relatifs à une conique et à des cercles.

Lieux relatifs à deux coniques.

Lieux relatifs à plus de deux coniques.

Lieux de centres.

Lieux de foyers.

Lieux de sommets.

Lieux relatifs à d'autres courbes.

SIXIÈME PARTIE.

ENVELOPPES.

Enveloppes de droites.

Autres enveloppes.

SEPTIÈME PARTIE.

FIGURES MOBILES. — TRAJECTOIRES.

Figures mobiles.

Trajectoires orthogonales ou obliques.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

18278 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.





UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06795 8770
LAISANT, C-
QA
43
.L189R
V 4
Digitized by Google

